Comment chercher une démonstration en géométrie ?

Il n'existe aucune méthode assurant de découvrir une démonstration, mais on peut augmenter ses chances de succès. C'est ce que nous allons voir sur un exemple.

Voici l'énoncé du problème :

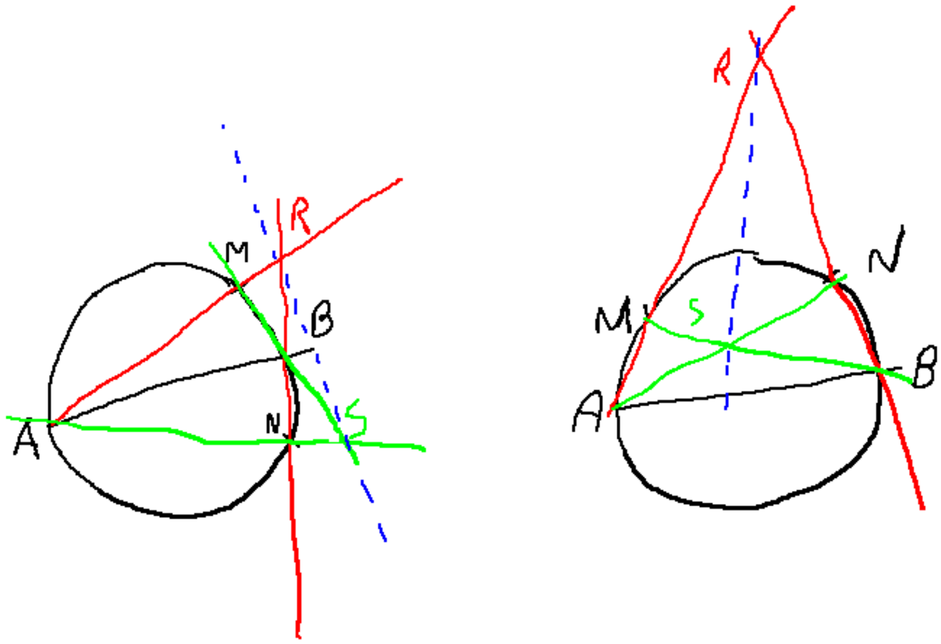
On considère un cercle de diamètre [AB].

M et N sont deux points de ce cercle, non diamétralement opposés.

Les droites (AM) et (BN) se coupent en R.
Les droites (AN) et (BM) se coupent en S.

Démontrer que les droites (AB) et (RS) sont perpendiculaires.

Commençons par faire **au moins deux** dessins, aussi différents que possible.
Ils peuvent être faits à main levée, car ils n'ont pas besoin d'une grande précision.



Observons un dessin, et notons tout ce qui **semble** vrai.
En observant le dessin de gauche, on observe par exemple que :

- (MN) **semble** parallèle à (RS).
- (AB) **semble** être la médiatrice de [RS].
- (RN) **semble** perpendiculaire à (AS).

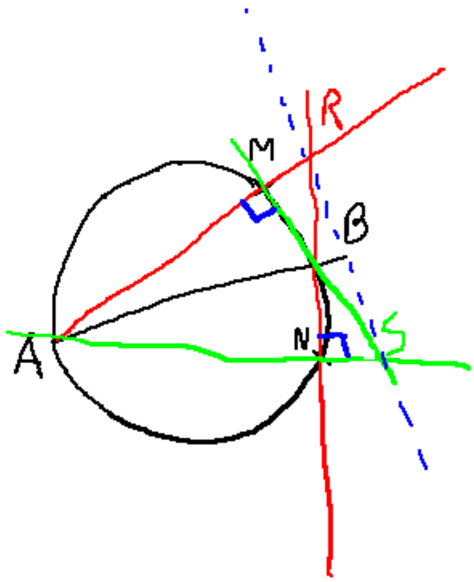
- MR **semble** être égal à NS.
- B **semble** être le milieu de [RS].
- AMN **semble** être un triangle isocèle en A.
- (MS) **semble** perpendiculaire à (AR).

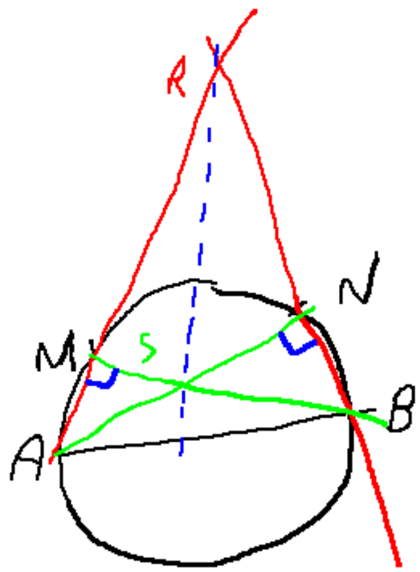
Soyons maintenant critiques : ce qu'on écrira dans la démonstration devra être exact sur tous les dessins envisageables pour ce problème. Les propriétés qui sont manifestement fausses sur le dessin de droite ne peuvent pas être vraies pour tous les dessins, on peut les abandonner.
N'oublions toutefois pas que les dessins sont faits à main levée. Il ne faudrait pas écarter trop vite une propriété qui ne semble pas vérifiée uniquement à cause de l'imprécision des dessins. Par exemple, sur le dessin de droite les droites (AB) et (RS) ne semblent pas perpendiculaire, or c'est ce qu'on nous demande de prouver, donc, sauf erreur dans l'énoncé, elles devraient l'être.

Parmi tout ce qu'on a observé sur le dessin de gauche, seules deux affirmations semblent vraies à droite :

(RN) **semble** perpendiculaire à (AS).
(MS) **semble** perpendiculaire à (AR).

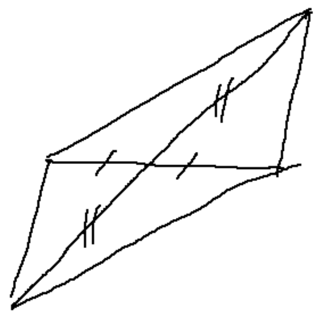
Si ces propriétés étaient vraies, cela nous donnerait-il des pistes pour poursuivre ?





Si le report sur les dessins des symboles de perpendicularité ne fait naitre aucune idée, essayons une approche plus systématique.

Pensons aux figures associées à différentes propriétés géométriques connues, et voyons si ces figures se retrouvent dans nos dessins.

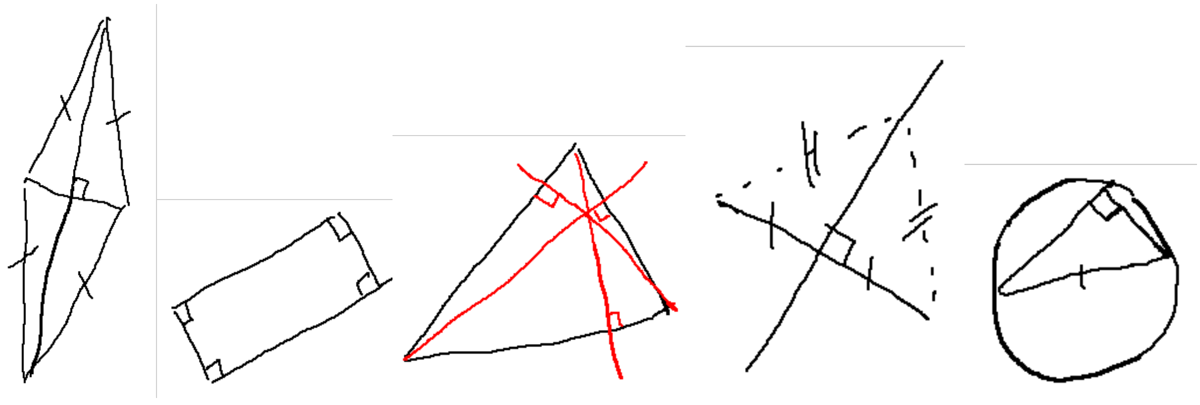


Cette figure ne vous suggère aucune idée nouvelle ?

Celle-ci non plus ?

Rien de très surprenant, notre objectif est de prouver que deux droites sont perpendiculaires, et notre seul résultat jusqu'à présent est d'avoir remarqué que d'autres droites semblent perpendiculaires… ce ne serait pas idiot de s'intéresser aux propriétés dans lesquelles figurent des droites perpendiculaires.

Ne nous limitons pas aux propriétés où figure le mot "perpendiculaire".
L'idée de droites perpendiculaires est fortement liée à celle d'angle droit et à celle de hauteur d'un triangle, à celle de médiatrice…
Se référer à une liste fiable des propriétés géométriques disponibles ne peut pas nuire.



Avec un peu de chance, on reconnait la troisième figure dans nos dessins du problème. Il semble bien y avoir un triangle et ses trois hauteurs.

Évidemment, les angles droits que nous avons codés sur les dessins ne sont pas encore prouvés, mais la cinquième figure (la seule dans laquelle intervient à la fois un cercle et des perpendiculaires) peut nous y aider.

C’est seulement maintenant que nous pouvons tenter de rédiger une démonstration.

La recherche au brouillon n'est pas une version ratée ou sale du travail final, c'est un document de préparation d'une nature entièrement différente de la production finale.

La démonstration rédigée vise à être courte et rigoureuse, ce n'est pas le cas de la recherche qui n'obéit pas à des règles aussi précises : tous les coups sont permis pour chercher, mais il faut être très critique sur ce qu'on rédige.

Voici à titre d’exemple une rédaction possible de la démonstration demandée :

M est sur le cercle de diamètre [AB] donc le triangle AMB est rectangle en M.

AMB est rectangle en M, donc les droites(MB) et (AM) sont perpendiculaires. Il en résulte que la droite (MB) qui passe par le sommet S du triangle ARS et qui est perpendiculaire au côté [AR] est une hauteur de ce triangle.

On démontre de la même façon que (NB) est une hauteur du triangle ARS.

Les droites (MB) et (NB) sont deux hauteurs du triangle ARS, donc leur point d'intersection B est l'orthocentre de ce triangle.

La droite (AB) passe par le sommet A du triangle ARS et par l'orthocentre B donc c'est la hauteur issue de A. Il en résulte que (AB) est perpendiculaire à (RS).

Remarquons qu’en observant le deuxième dessin on pense plus facilement au triangle ABR et à son orthocentre S qu’au triangle ARS de la démonstration ci-dessus.
Cela conduit à une autre rédaction parfaitement correcte également.