

Les figures concaves, des monstres très intéressants

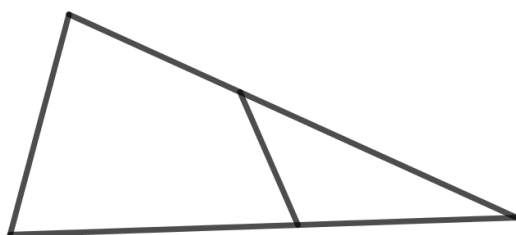
Ce document présente une série de situations utilisant pour la plupart des figures concaves, et particulièrement des quadrilatères concaves.

À l'occasion des activités proposées, les connaissances et compétences suivantes peuvent être développées :

De même qu'un triangle ne ressemble pas toujours à une tente d'Indien, un quadrilatère ne ressemble pas nécessairement à un rectangle ou un carré plus ou moins réussi.
On apprend à envisager des figures variées.

On peut voir ici :

un triangle dans lequel est tracé un segment,
l'assemblage d'un quadrilatère et d'un triangle,
un petit triangle à l'intérieur d'un grand,
cinq points reliés par différents segments,
un quadrilatère dont deux côtés ont été prolongés.



On apprend à décrire une même figure de plusieurs façons.

On s'exerce au maniement de la règle sans pression particulière, car le but n'est pas d'obtenir une belle figure, ni une figure exactement semblable à un modèle.

On met en œuvre quelques principes heuristiques :

Si une idée a permis de résoudre un problème, s'en resservir pour un autre problème proche est judicieux... mais ce n'est pas une garantie de succès.

Même si on a longtemps cherché quelque chose sans trouver, il n'est pas certain que ce soit impossible.

Un certain nombre de termes désignant des objets ou des propriétés géométriques sont utilisés : concave, triangle, quadrilatère, polygone, côté, sommet, diagonale, segment de droite...

Pour autant, le travail proposé n'est pas essentiellement une leçon de vocabulaire. Il s'agit avant tout de résoudre des problèmes de mathématique ou d'observer des propriétés curieuses. Le vocabulaire est fonctionnel : il sert à lever des ambiguïtés.

En classe, l'enseignant utilise autant que nécessaire une double désignation des objets géométriques, en juxtaposant le terme technique nouveau et son explication dans des termes déjà connus :

Je trace un trait bien droit, un segment de droite.

Je dessine un quadrilatère, une figure fermée qui a quatre côtés.

Je trace une diagonale, un segment qui joint deux sommets (et qui n'est pas un côté).

Progressivement, le terme géométrique exact est de moins en moins souvent accompagné d'une explication, jusqu'à devenir autonome.

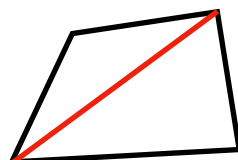
L'emploi du terme juste par les élèves n'est pas une exigence, mais quand une explication d'élève est ambiguë, l'enseignant reformule correctement.

Pour ne pas alourdir un texte déjà long, nous utilisons dans ce document les termes géométriques nouveaux avec moins de précautions qu'en classe.

Les figures concaves, des monstres très intéressants

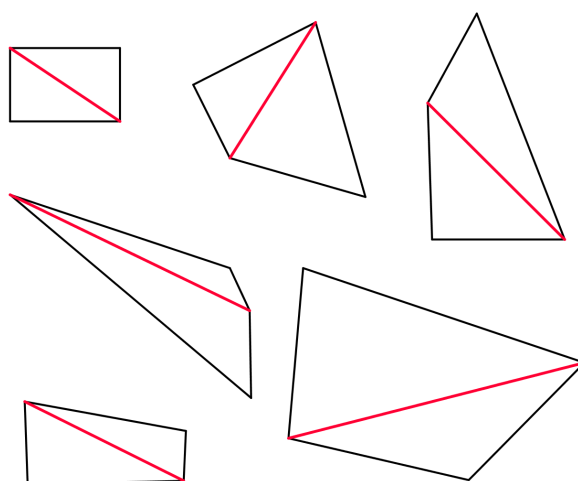
Séance 1

— J'ai tracé au tableau un quadrilatère, c'est-à-dire une figure qui a 4 côtés... et je l'ai partagé en deux triangles en traçant la ligne rouge.



— C'est à vous maintenant, vous dessinez un quadrilatère et vous le partagez en deux triangles. Votre quadrilatère n'est pas obligé de ressembler au mien. Au contraire, s'il y a dans la classe des quadrilatères très différents les uns des autres, c'est mieux.

Un peu plus tard, on affiche les productions, on vérifie leur conformité à la consigne, on laisse le temps aux auteurs de figures erronées de dessiner une nouvelle figure... et on obtient un ensemble ressemblant à ceci.



— Très bien, vous avez réussi à partager des quadrilatères en deux triangles. Vous avez tous utilisé la même méthode. Vous avez tracé une diagonale du quadrilatère. Une diagonale, c'est un trait bien droit qui va d'un sommet à un autre sommet.

— Alors, un côté, c'est une diagonale ?

— Très bonne question Zélie, je me suis mal expliqué. Une diagonale, c'est un trait bien droit qui n'est pas un côté et qui va quand même d'un sommet à un autre sommet.

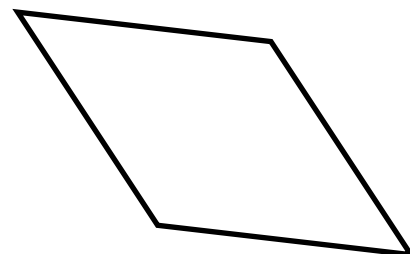
Remarque : nous utilisons ici le terme « sommet » sans précaution particulière comme synonyme de coin ou pointe. Cette conception est insuffisante pour des figures concaves, une définition précise est proposée plus loin.

Un défi :

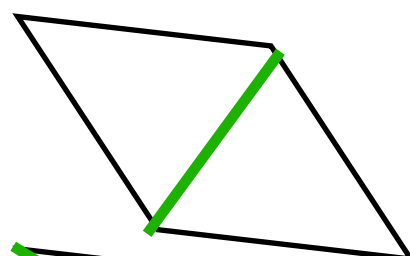
— Je vais maintenant vous proposer un défi. Un défi, c'est quelque chose qui est difficile à réussir, mais pas impossible.

Vous allez essayer de dessiner un quadrilatère puis de le découper en deux triangles, **sans dessiner de diagonale**.

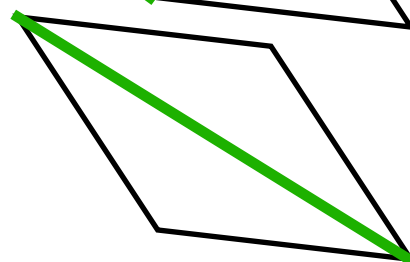
Si par exemple vous choisissez ce quadrilatère :



vous ne pouvez pas le partager comme ça,



ni comme ça.



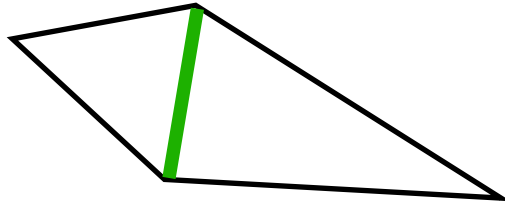
L'enseignant laisse quelques minutes de recherche... mais pas trop pour ne pas laisser le découragement s'installer.

— Je vais vous donner une indication. Découper un quadrilatère en deux triangles sans tracer une diagonale n'est pas possible avec n'importe quel quadrilatère. Le plus difficile dans ce défi, c'est peut-être de trouver des quadrilatères auxquels on n'a pas encore pensé.

L'enseignant laisse une autre période de recherche de quelques minutes, mais il n'est pas certain du tout que l'indication qui précède suffise.

Si aucune solution n'est trouvée, l'enseignant rappelle ce que l'on cherche avant d'indiquer que cette recherche sera poursuivie un autre jour.

Partager un quadrilatère en deux triangles en traçant une diagonale, c'est facile.



Nous n'avons pas réussi à partager un quadrilatère en deux triangles d'une autre façon.

Nous cherchons des quadrilatères différents de ceux que nous avons déjà dessinés

S'il le souhaite, l'enseignant précise que les élèves ont le droit de continuer à chercher chez eux et même de se faire aider par leurs frères et sœurs, leurs parents, voisins, amis... (une consigne écrite est fournie à la fin du présent document).

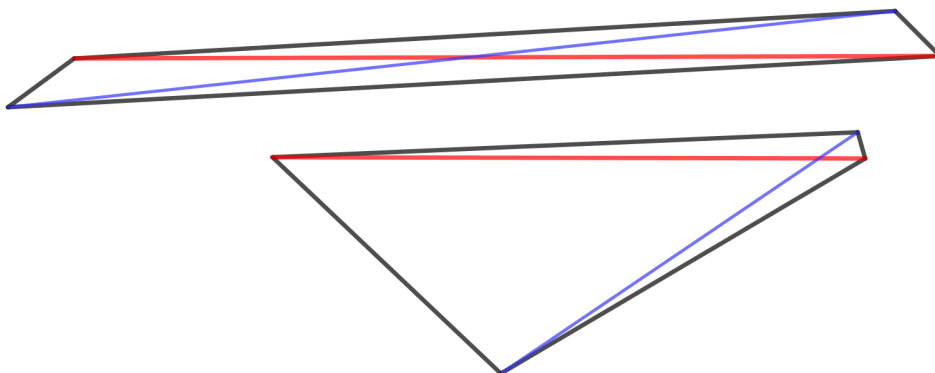
Séance 2

Il est probable que, dès le début de la deuxième séance, des élèves proposent des quadrilatères originaux.

Ceux-ci peuvent être de trois types différents :

Proposition 1 : des quadrilatères seulement visuellement différents.

C'est le cas si un élève propose un quadrilatère très allongé, ou avec un côté très court par rapport aux autres, de sorte qu'il a presque l'aspect d'un triangle.

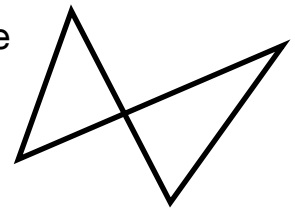


L'enseignant félicite l'auteur d'une de ces figures pour son travail, car le quadrilatère proposé ne ressemble pas aux précédents. Cependant, comme pour les quadrilatères envisagés auparavant, on peut facilement le partager en deux triangles à l'aide d'une diagonale... et on ne voit pas comment faire autrement.

Ces quadrilatères ne semblent pas permettre de relever le défi.

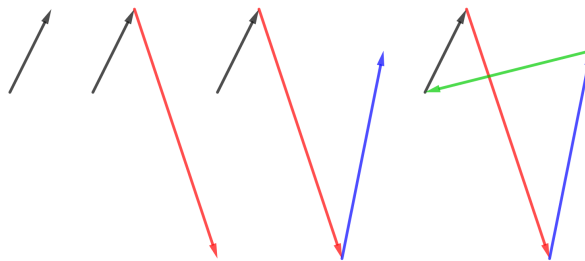
Proposition 2 : des quadrilatères croisés.

Ce cas est moins probable. Pour la plupart des élèves, cette figure n'est pas un quadrilatère, mais un assemblage de deux triangles.



Si une telle proposition est faite, l'enseignant montre aux autres élèves pourquoi on peut considérer cette figure comme un quadrilatère : c'est une figure fermée à quatre côtés.

Pour bien le montrer, il trace les côtés un à un, de couleurs différentes :

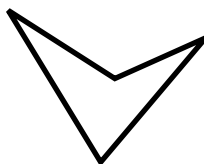


Il confirme ensuite qu'il s'agit d'une façon de relever le défi puisque ce quadrilatère se partage de lui-même en deux triangles, sans rien tracer d'autre.

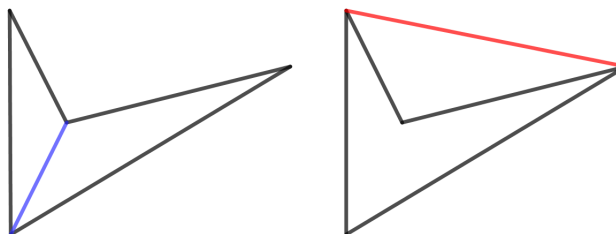
Cependant, il est possible de relever le défi avec un quadrilatère plus ordinaire, qui n'est pas déjà partagé en deux, qui a une seule zone intérieure... nous pouvons donc continuer à chercher.

Si personne ne propose de quadrilatère croisé, l'enseignant n'en parle pas.

Proposition 3 : des quadrilatères concaves.



Si cette proposition est faite, l'enseignant met en évidence une particularité :



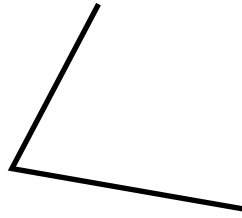
Ce quadrilatère est partagé en deux triangles par sa diagonale bleue... mais pas par sa diagonale rouge qui n'est même pas à l'intérieur du quadrilatère.

Ce quadrilatère bizarre s'appelle un quadrilatère concave.

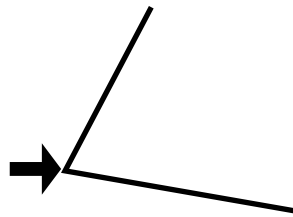
Peut-on le partager en deux triangles autrement que par la diagonale bleue ?

Comment relancer si aucun quadrilatère concave n'est proposé ?

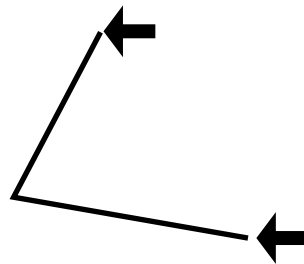
Je vais vous aider à trouver des quadrilatères auxquels vous ne pensez pas. Quand je trace un quadrilatère, je commence par tracer deux côtés, un peu au hasard.



Quand j'ai fait ça, sans y faire attention j'ai déjà placé trois sommets: celui-ci bien sûr,

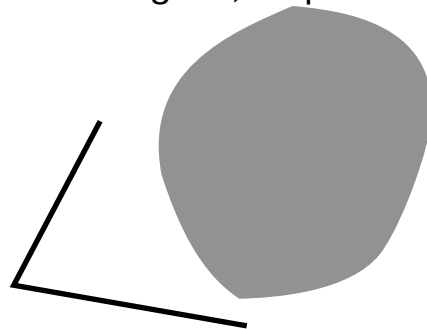


mais aussi ceux-là.



Où faut-il placer le quatrième sommet ?

Souvent, on le place dans la zone grise, ou pas très loin...



Pour obtenir un quadrilatère qui ne ressemble pas à ceux qu'on a déjà dessinés, ce serait une bonne idée de placer le quatrième sommet loin de la zone grise.

La solution du défi

Après la relance précédente, il est probable que certains élèves proposent des quadrilatères concaves... cela ne garantit pas qu'ils verront comment les partager en deux triangles autrement que par une diagonale.

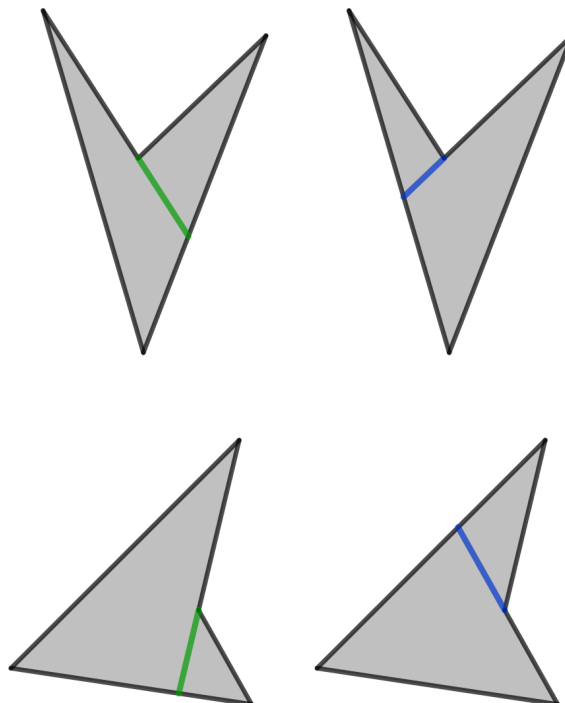
L'enseignant encourage donc tous les élèves à tracer un quadrilatère concave et à tenter de le partager en deux triangles autrement que par sa diagonale intérieure.

À ce stade, la solution devrait venir assez rapidement.

Si ce n'est pas le cas, l'enseignant laisse quelques minutes de recherche puis indique qu'il montrera la solution à la séance suivante si personne ne l'a trouvée d'ici là.

Séance 3

Pour partager un quadrilatère en deux triangles sans tracer une diagonale :
Je trace un quadrilatère concave.
Je prolonge un côté.
Pour chaque quadrilatère concave, il y a deux façons de le faire.



L'enseignant demande ensuite à chaque élève de dessiner un quadrilatère et de le partager en deux triangles sans tracer de diagonale.

Séances suivantes :
expériences et défis en lien avec les figures concaves

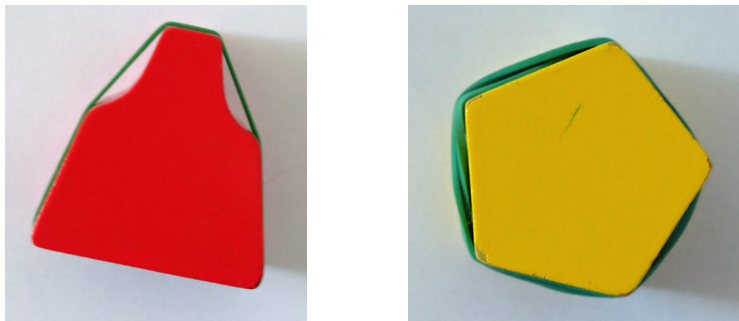
Expérience : l'élastique

Il n'y a pas que les quadrilatères qui peuvent être concaves... toutes les figures qui ont « un creux » sont concaves.

Si l'on dispose de formes suffisamment épaisses et solides pour pouvoir être entourées d'un élastique (tout en étant assez minces pour évoquer une figure plane) on peut faire l'observation suivante :

Pour certaines figures, l'élastique touche la figure partout.

Pour d'autres figures, il y a des endroits où l'élastique ne touche pas la figure, ce sont ces figures que l'on appelle « concaves »



La figure rouge est concave, pas la figure jaune.

Nous ne pensons pas utile d'introduire le terme « convexe » pour désigner les figures qui ne sont pas concaves.

Défi : la petite corde qui en entoure une grande

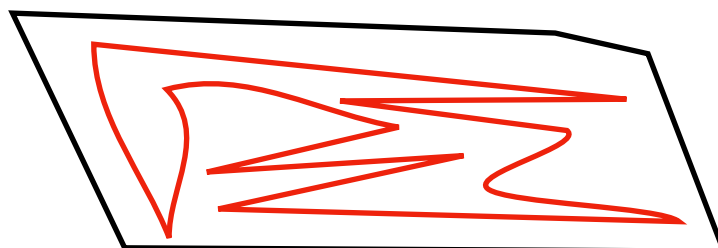
On dispose d'une grande corde (par exemple 8 m de long) et d'une plus petite (par exemple 6 m de long)

Il faut réaliser une figure fermée en posant sur le sol la grande corde.

Ensuite, *il faut entourer cette figure à l'aide de la petite corde.*

Les élèves qui manipuleront les cordes et les observateurs doivent évidemment se concerter avant de poser les cordes.

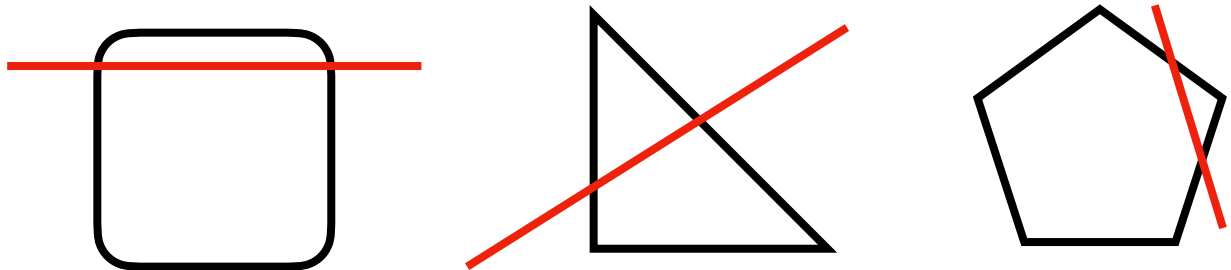
Il n'est possible de réussir ce défi que si la grande corde est disposée pour former une figure concave comme dans l'exemple ci-dessous.



Défi : les trois morceaux

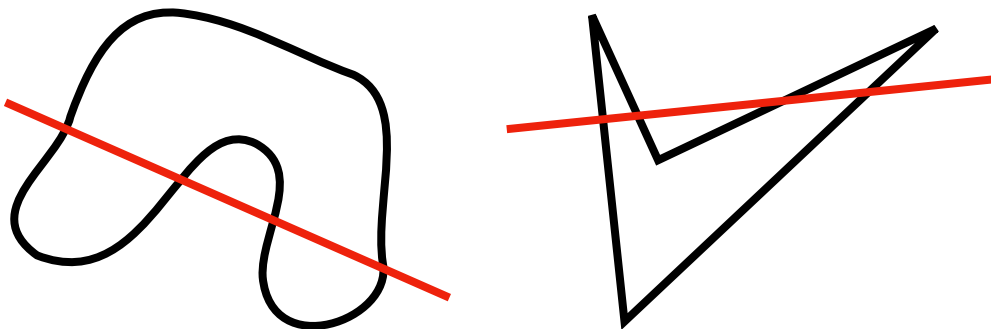
— Je dessine une figure puis je la partage en traçant un trait bien droit (on appelle ça un segment de droite).
Pour ce défi, j'ai le droit à n'importe quelle figure, et les morceaux peuvent avoir n'importe quelle forme.

Voilà des exemples de ce que je peux faire :



Sur tous ces exemples, le segment rouge partage ma figure en deux morceaux. Le nouveau défi que je vous pose consiste à dessiner une figure puis à la partager en trois morceaux à l'aide d'un seul segment de droite.

Comme pour le premier défi, on ne peut réussir que si l'on pense aux figures concaves... ce qui devrait venir plus facilement à l'esprit puisqu'à ce stade on les a déjà rencontrées plusieurs fois.

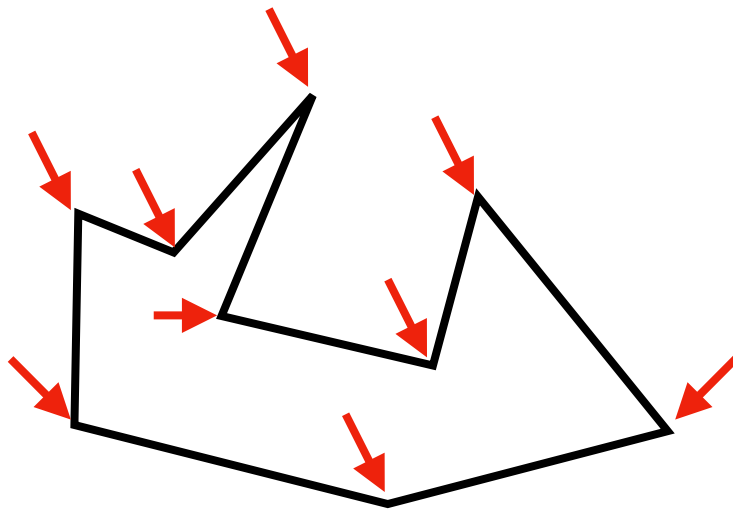


Expérience : trois quadrilatères concaves pour le prix d'un

— Savez-vous ce que sont les sommets d'un triangle, d'un quadrilatère, ou d'un autre polygone ? Un sommet, c'est le point où deux côtés se rencontrent.

Contrairement au sommet d'une montagne le sommet d'un polygone peut se trouver en bas de la figure. Un sommet n'est pas forcément très pointu et il peut même être dans un creux.

Les petites flèches rouges indiquent tous les sommets de ce polygone :



— Je vais vous proposer une façon originale de dessiner un quadrilatère : en commençant par ses sommets. Pour commencer, je place trois points, comme si c'était les trois sommets d'un triangle.

x

x

x

— Réussissez-vous à voir le triangle dans votre tête ?

L'enseignant envoie un élève au tableau suivre du doigt le contour du triangle.

— Ensuite, je place un quatrième point dans le triangle, à l'intérieur, par exemple comme ça :

x

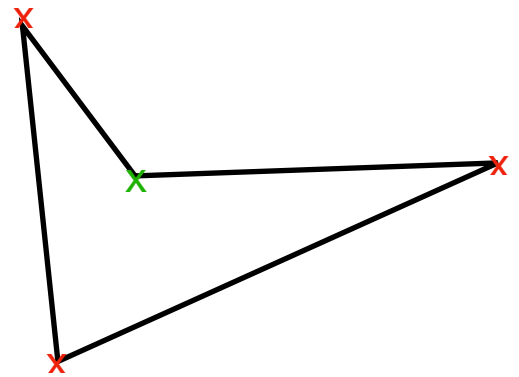
x

x

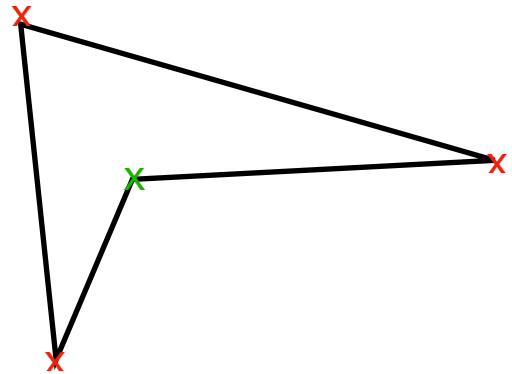
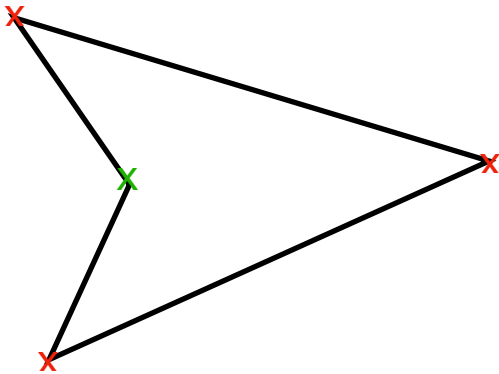
x

— Et pour finir, je trace un quadrilatère en joignant ces quatre points. Les quatre points doivent être les sommets du quadrilatère.

Je peux, par exemple, tracer ce quadrilatère :



Avec les mêmes sommets, je peux aussi dessiner ces deux quadrilatères.



Les élèves s'entraînent ensuite à dessiner trois quadrilatères concaves différents à partir de la même disposition de points, reproduite trois fois.

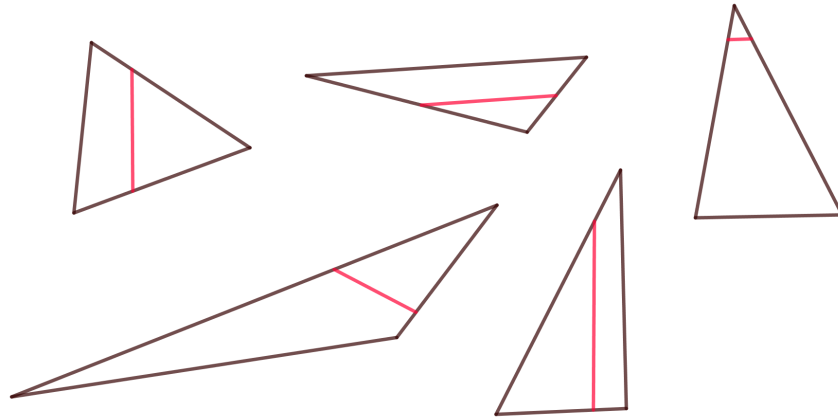
Pour ce travail, on ne cherche pas la précision, il n'est pas nécessaire que la disposition des points soit exactement la même les trois fois (ce qui serait d'ailleurs hors de portée des élèves), il faut simplement que les trois dessins aient approximativement la même allure. Pour certains élèves, l'utilisation de la règle peut compromettre la vision d'ensemble du quadrilatère qu'ils veulent dessiner. On permettra donc le dessin à main levée.

Défi : Le triangle découpé

— Nous avons commencé à travailler avec des figures concaves en partageant des quadrilatères en deux morceaux. Aujourd'hui, nous allons partager des triangles.

— Vous allez dessiner chacun un triangle et le partager en deux morceaux. Il faut qu'un des deux morceaux soit un triangle, et l'autre un quadrilatère.

Cette étape n'est pas très difficile, on devrait rapidement obtenir une collection ressemblant à celle-ci :

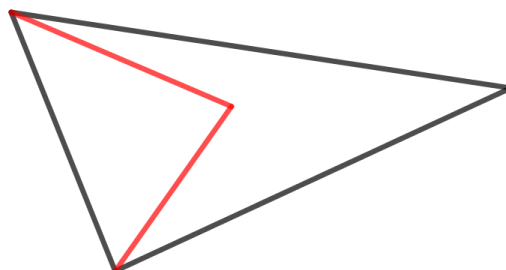


— Avez-vous remarqué que tous vos partages sont faits de la même façon ? Vous avez choisi un point sur un côté du triangle, un deuxième point sur un autre côté du triangle, et vous avez tracé le segment qui joint ces deux points. C'est très bien.

— **Voici maintenant le défi :** vous allez essayer de partager un triangle en deux parties, un triangle et un quadrilatère, d'une autre façon. Aucune des figures affichées ne convient plus.

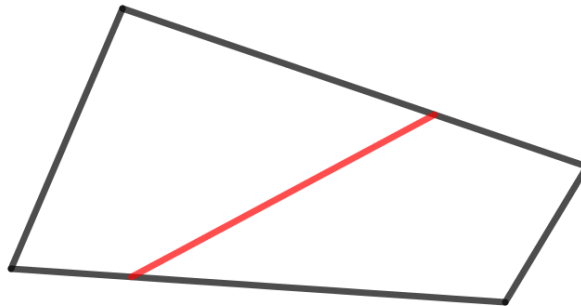
Comme on avait résolu le premier défi en partant d'un quadrilatère concave, certains élèves essaieront peut-être de choisir pour ce nouveau défi un triangle concave. C'est une idée intelligente... et une excellente occasion de découvrir qu'il n'existe aucun triangle concave.

À ce stade, si aucun élève ne trouve la solution, nous proposons de laisser l'énigme ouverte : chacun cherche quand il en a envie.



Défi : le quadrilatère découpé en deux quadrilatères

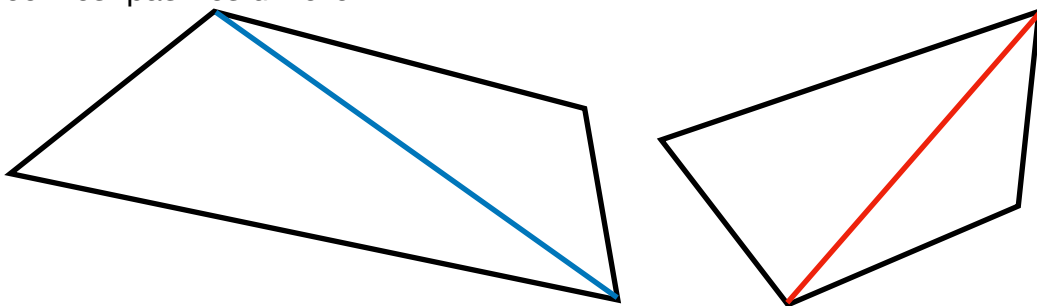
— Découper un quadrilatère en deux quadrilatères qui ne sont pas concaves, ce n'est pas très difficile :



— Peut on, en découpant un quadrilatère, obtenir deux quadrilatères dont l'un est concave et pas l'autre ?

— Peut on, en découpant un quadrilatère, obtenir deux quadrilatères concaves ?

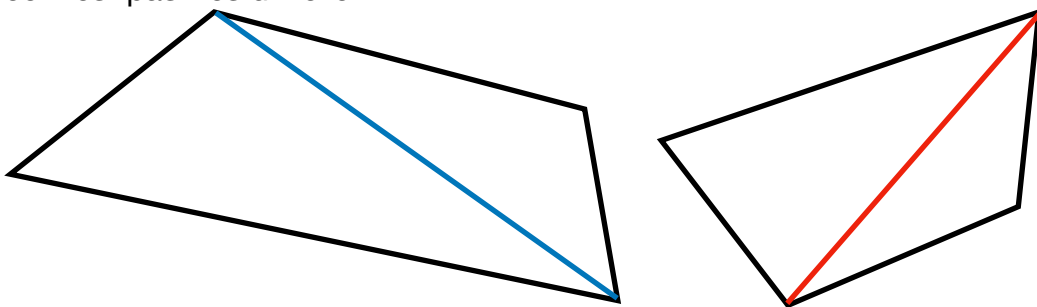
Dessiner une figure qui a quatre côtés et la partager en deux en traçant une **diagonale**, ce n'est pas très difficile.



Dessiner une figure à quatre côtés et la partager en deux **sans tracer de diagonale**, c'est beaucoup plus difficile.

Ce défi est posé aux élèves de la classe. Ils ont le droit de se faire aider par leurs frères ou sœurs, leurs parents, leurs amis, leurs voisins...

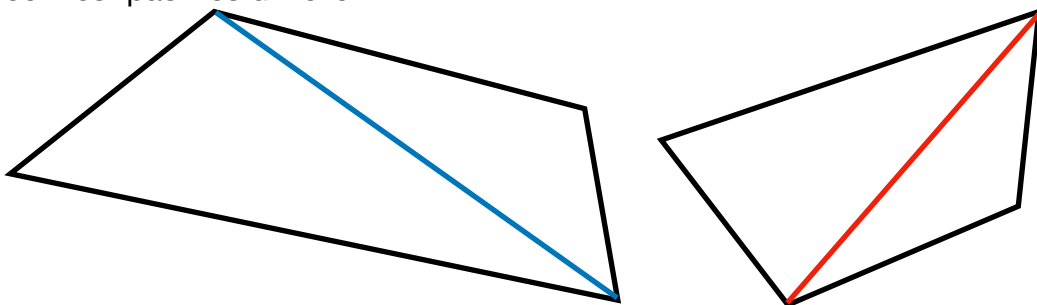
Dessiner une figure qui a quatre côtés et la partager en deux en traçant une **diagonale**, ce n'est pas très difficile.



Dessiner une figure à quatre côtés et la partager en deux **sans tracer de diagonale**, c'est beaucoup plus difficile.

Ce défi est posé aux élèves de la classe. Ils ont le droit de se faire aider par leurs frères ou sœurs, leurs parents, leurs amis, leurs voisins...

Dessiner une figure qui a quatre côtés et la partager en deux en traçant une **diagonale**, ce n'est pas très difficile.



Dessiner une figure à quatre côtés et la partager en deux **sans tracer de diagonale**, c'est beaucoup plus difficile.

Ce défi est posé aux élèves de la classe. Ils ont le droit de se faire aider par leurs frères ou sœurs, leurs parents, leurs amis, leurs voisins...