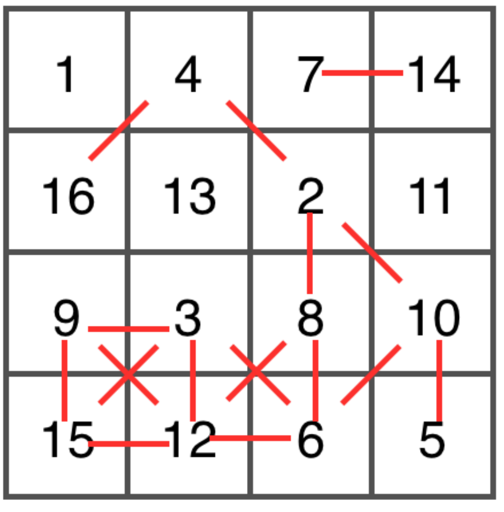
Les voisins de table

En bref

Placer les nombres de 1 à 16 dans une grille en évitant autant que faire se peut de placer côte à côte des nombres ayant un diviseur commun (autre que 1).

Introduction du problème



J'ai placé les nombres de 1 à 16 dans cette grille puis j'ai relié par un trait rouge certaines cases voisines.

Un trait rouge signifie que deux cases voisines sont dans une même table de multiplication. Bien entendu, on ne tient pas compte de la table de 1, sinon il faudrait des traits partout.

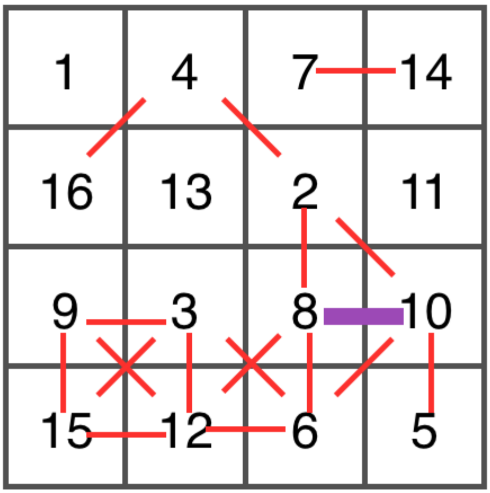
On ne trace jamais plus d'un trait entre deux cases : 6 et 12 sont dans la table de 2, dans celle de 3 et aussi dans celle de 6 mais ils ne sont reliés que par un trait.

Sur mon premier essai, il y a 17 traits.

Si vous trouvez une disposition avec 16 traits, c'est mieux. 15 traits, c'est encore mieux et 14...

Le but est d'avoir une disposition avec le moins possible de traits.

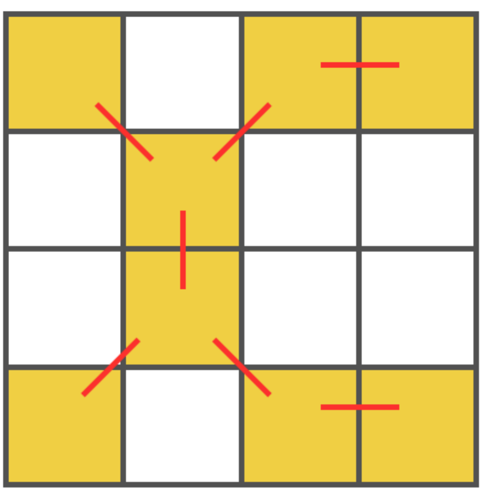
Faites bien attention, dans ce problème il est très facile d'oublier un trait. Avez-vous remarqué qu'il en manque un sur mon exemple... pour lequel il faut donc tracer 18 traits.



Éléments de relance

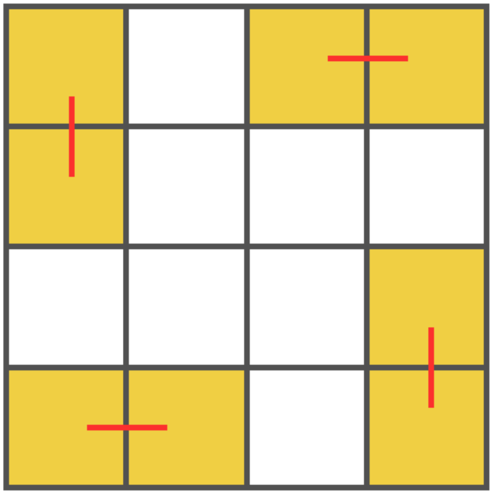
L'enseignant sollicite des suggestions sur les méthodes permettant d'obtenir de bonnes dispositions.

Si aucun élève ne le fait, il fait remarquer qu'il y a 8 nombres pairs, 8 nombres de la table de deux.



Si on place les nombres pairs sur ces cases jaunes, il y a déjà 7 traits avant de placer les autres nombres. Pour obtenir une « bonne » grille, on peut commencer par « bien »placer les nombres pairs.

Cela devrait conduire assez rapidement à la disposition suivante, qui ne nécessite que 4 traits.

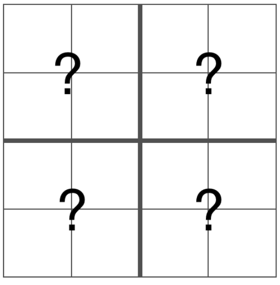


Peut-on trouver une disposition des 8 nombres pairs qui nécessite moins de 4 traits ? Cela semble difficile.

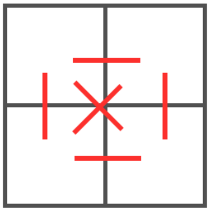
Éléments de preuve

S'il le souhaite, l'enseignant peut prouver à ses élèves qu'on ne peut pas obtenir moins de 4 traits entre les nombres pairs de la façon suivante :

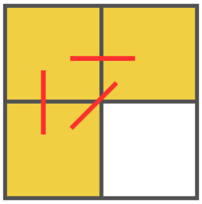
Partageons la grille en 4 petits carrés : combien de nombres pairs allons-nous placer dans chaque zone ?



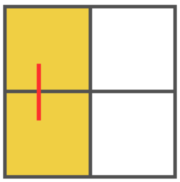
Quand on place 4 nombres pairs dans une même zone, il y a 6 traits dans cette zone.

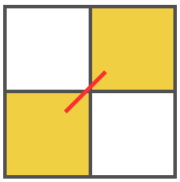


Si on en place 3 dans une même zone, il y a 3 traits dans cette zone.



Si on place 2 dans une même zone il y a 1 trait dans cette zone.





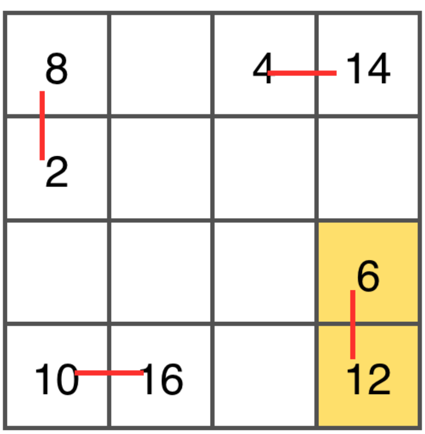
S'il y a une zone avec 4 nombres pairs, il y a au moins 6 traits en tout.

S'il y a une zone avec 3 nombres pairs, il reste 5 nombres pairs à placer dans les autres zones. Si on en place encore 3 dans une même zone, il y a au moins 6 traits en tout. Si on choisit de les répartir en 2 groupes de 2 et un nombre isolé dans sa zone, il y a au moins 5 traits en tout

Si chaque zone contient deux nombres pairs, il y a un trait dans chaque zone, 4 traits en tout (et peut-être d'autres traits reliant des cases qui ne sont pas dans la même zone).

Dans tous les cas il y a donc au moins 4 traits qui relient les nombres pairs.

Remarque : en répartissant les 5 multiples de 3 dans les 4 zones, on peut montrer qu'il y a au moins un trait reliant deux multiples de 3. Il est tentant (mais faux) d'en déduire qu'il faut au moins 5 traits en tout. En effet, en plaçant 6 et 12 dans deux cases adjacentes on obtient 4 traits reliant des nombres pairs et un trait reliant des multiples de 3 avec seulement 4 traits. Nous conseillons de ne pas aborder cette question au cycle 3.



Au cycle 3, le problème restera partiellement ouvert même si l'enseignant a expliqué pourquoi on ne peut pas avoir moins de 4 traits.

Dans la plupart des classes, l'état de la recherche se traduira par un de ces deux schémas :

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4 5 6 7 8 ~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4 5 6 7 8

Les nombres entourés en vert sont ceux qu'on sait obtenir, les nombres barrés en rouge sont ceux qu'il est impossible d'obtenir, les nombres non marqués correspondent à la zone d'incertitude : on ne sait pas s'il est possible ou non d'obtenir ces valeurs.

Aménagements pour le cycle 2

On cherche seulement des exemples de grilles avec le moins possible de traits sans aborder la question du minimum.

Prolongements pour le cycle 4

— Chercher à montrer qu'il est impossible d'obtenir seulement 4 traits.
— Poser le même problème sur une grille 5x5
— Sur grille 5x5, utiliser des nombres consécutifs à partir de 30 ou de 40. Cela donne l'occasion de réviser quelques tables de multiplication, par exemple pour répérer que 35 et 49 sont dans une même table.

Compléments

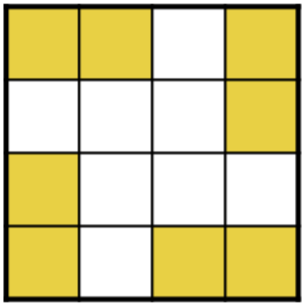
8	15	4	14
2	13	1	9
3	7	11	6
10	16	5	12

Voici une disposition avec seulement 5 traits.

Dans la partie « éléments de preuve », nous avons montré que si on partage la grille en 4 petits carrés de 4 cases, pour n'avoir que 4 traits reliant les nombres pairs il faut placer 2 nombres pairs dans chaque petit carré.

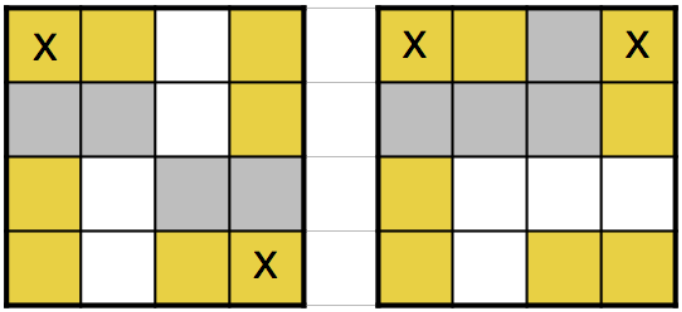
Si on place un nombre pair dans une case centrale, on constate facilement qu'on ne peut pas éviter d'avoir 5 traits entre les nombres pairs.

En essayant de disposer les 8 nombres pairs dans les cases périphériques on constate que la disposition suivante est, avec celle obtenue par symétrie, la seule pour laquelle les nombres pairs sont reliés par seulement 4 traits.

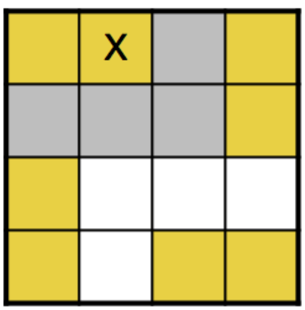


Les nombres pairs doivent donc être placés sur les cases jaunes si l'on veut obtenir en tout 4 traits seulement. Envisageons toutes les dispositions de 6 et 12 (cases marquées d'une croix).

1. 6 et 12 sont situés dans des coins de la grille



2. L'un des deux nombres, 6 ou 12, est situé sur un bord (peu importe alors où est l'autre)



Les cases grises des figures sont interdites aux multiples de 3 car cela obligerait à tracer un cinquième trait. On constate dans tous les cas qu'il ne reste pas assez de cases disponible pour placer 3, 9 et 15 sans que deux d'entre eux se touchent.

Il est donc impossible de trouver une configuration à 4 traits, la configuration à 5 traits proposée (il en existe d'autres) est donc la meilleur possible.