Problèmes et devinette

Pour beaucoup d'élèves, résoudre un problème se résume à trouver (voire à deviner) la bonne opération.

Comment cette idée se répand-elle ?
Que peut-on faire pour en limiter la propagation ?

Cette page propose quelques éléments de réponse, mais, décevons tout de suite l'attente des plus enthousiastes, nous ne sommes pas dans un domaine de causalité simple où il suffirait de modifier la source des difficultés pour les éradiquer.

Les facteurs sont multiples, et si certains d'entre eux peuvent être supprimés sans inconvénient, d'autres ont par ailleurs des effets positifs indéniables et on ne peut qu'essayer d'en limiter les effets non souhaités.

Nous nous contentons donc de mettre en évidence quelques curseurs sur lesquels on peut agir pour modifier l'équilibre concernant les problèmes mathématiques dans la classe.

Premier facteur : C'est efficace.

En cherchant à deviner la bonne opération, on réussit assez souvent pour que beaucoup d'élèves s'en contentent.

On ne peut pas entièrement éviter ce phénomène. En effet, pour résoudre un problème un peu complexe, on a souvent besoin d'y reconnaitre des étapes possibles qui ressemblent à des problèmes standards élémentaires.

Reconnaitre immédiatement que, quand on met 15 billes dans une boite qui en contient déjà 20 on trouve le nombre de billes contenues dans la boite en effectuant l'opération 20 + 15, ou que le nombre de timbres contenus dans 4 carnets de 12 timbres est égal à 4 x 12 est indispensable.

Or il n'est pas possible de rendre automatique la reconnaissance de ces situations standards sans les proposer fréquemment.

Action possible :
Proposer régulièrement des problèmes qui ne peuvent pas se résoudre ainsi.

C'est par exemple une bonne raison pour proposer des problèmes de partage bien avant d'enseigner la division (une autre raison de le faire est qu'en procédant ainsi, la division prend tout son sens quand on l'aborde : elle sert à résoudre plus efficacement une catégorie de problèmes qu'on a déjà rencontrés).

Une façon simple de créer des problèmes pour lesquels on ne peut pas se contenter de « trouver la bonne opération » consiste à poser des questions dont la réponse attendue n'est pas un nombre. Si la question est « quelle est la tour la plus haute ?», « A-t-elle assez d'essence pour aller jusqu'à Limoges ? », « Quel jour de la semaine mangera-t-il son dernier bonbon ? »…

Deuxième facteur :
On sait mal évaluer la capacité à résoudre des problèmes.

Quand les problèmes sont de vrais problèmes, il est normal de ne pas toujours réussir à les résoudre. Il est tentant, pour augmenter le taux de réussite, de n'évaluer que les problèmes dont la résolution a été automatisée.

Ces problèmes n'en sont plus réellement pour les élèves concernés et ils peuvent effectivement les résoudre en "trouvant la bonne opération".

Si ces problèmes sont les seuls évalués, il n'est pas étonnant que pour certains élèves ils soient les seuls à avoir de l'importance.

Action possible : Modifier le contrat de l'évaluation.

On peut par exemple proposer plusieurs problèmes et considérer que l'évaluation est réussie si un des problèmes est résolu, à condition qu'aucune absurdité ne soit proposée pour les autres problèmes.

Cela peut se traduire, si on utilise des notes, par l'échelle suivante :

Le maitre a proposé 4 problèmes, la résolution d'un problème apporte 6 points sur 10, deux problèmes 9 points sur 10 et trois problèmes 10 points sur 10.

Un problème résolu partiellement ou avec une erreur peut éventuellement procurer une partie des points, mais une absurdité enlève un point.

Attention, nous parlons bien d'absurdité, et non d'erreur. La différence entre les deux est facilement comprise par les élèves pour peu qu'on l'explicite, et illustrée par la petite fable suivante (que nous utilisons également avec les candidats au CRPE) :

On me demande dans la rue comment se rendre au théâtre de Rezé.

Si je sais où se situe le théâtre de Rezé, je ferme les yeux, j'essaye d'imaginer le trajet puis j'annonce : "Prenez la deuxième rue à gauche, avancez tout droit pendant environ un kilomètre puis tournez à droite au niveau de la boulangerie".

Il se peut que l'itinéraire annoncé soit faux (en réalité c'est la troisième à gauche qu'il faut prendre, j'ai oublié une rue) j'ai alors commis une erreur, ce qui arrive aux meilleurs d'entre nous.

En revanche, si je ne sais pas où est ce théâtre, je n'imite pas le cas précédent en fermant les yeux et en énonçant un itinéraire fantaisiste, je me contente de dire que je ne sais pas.

En mathématiques comme ailleurs, quand on n'a aucune idée de ce qui est vrai, on doit dire qu'on ne sait pas. Faire le contraire n'est pas une erreur, mais une absurdité ou une ânerie.

En mathématiques comme ailleurs, on a le droit à l'erreur, pas à l'absurdité.

En pratique, la détection des absurdités est loin d'être simple. Un élève peut par exemple effectuer une opération semblant totalement absurde par rapport à l'énoncé du problème, mais cohérente avec son interprétation erronée de cet énoncé.

Il nous semble cependant qu'en s'entourant de précautions (donner à l'élève la possibilité de s'expliquer sur ce qu'il a voulu faire chaque fois que quelque chose semble absurde, conclure dans le sens d'une erreur en cas de doute, c'est-à-dire quand l'élève argumente, même si on a du mal à suivre son argumentation) la distinction entre l'erreur (toujours légitime) et l'absurdité, l'ânerie ou l'abracadabra (qui ne sont pas du domaine des mathématiques) est fructueuse.

On pourra installer par exemple le contrat selon lequel la présence d'un mot inducteur comme enlever, partager, ajouter dans l'énoncé du problème n'est pas un argument légitime en mathématique.

Si on choisit d'effectuer une opération sur cette seule base, ce n'est pas une erreur...

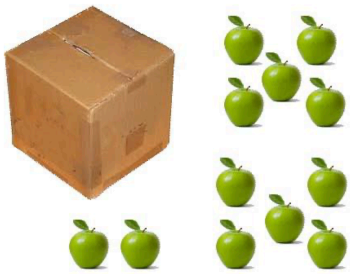
Troisième facteur :
Le maitre donne parfois l'impression que c'est ce qu'il attend.

On exige parfois trop tôt qu'un problème soit résolu à l'aide d'une opération.

Supposons qu'on propose dans une classe de CP, en période 5, le problème suivant :

Il y a 25 pommes en tout.

Combien de pommes sont cachées dans la caisse ?



Un élève de CP qui a compris le principe de l'écriture décimale des nombres peut raisonner à peu près comme ceci :

En tout il y a 2 dizaines de pommes et encore 5 pommes. Je vois une dizaine de pommes et deux pommes alors sous la boite il y a ce qui manque : une dizaine et 3 pommes c'est à dire 13 pommes.

À ce stade, ce n'est pas en posant une opération qu'il résout le problème.

Si l'enseignant exige d'en écrire une, il induit c'est cela qui importe avant tout.

Si dans les années qui suivent on impose une présentation trop rigide de la résolution des problèmes, du type opérations dans une colonne et phrase rédigée dans une autre, on confirme que l'important est l'opération.

Action possible :

Accepter aussi longtemps que nécessaire les solutions par tâtonnement, schéma... Idéalement, les opérations devraient s'imposer d'elles-mêmes quand elles deviennent une procédure efficace du point de vue des enfants. Pour favoriser le processus, il est sans doute plus judicieux de jouer sur les valeurs numériques (quand les nombres sont grands, les opérations sont souvent plus économiques que les autres méthodes) que d'imposer l'usage d'une méthode dont les enfants ne perçoivent pas encore la portée.

Proposer dans les plus grandes classes une présentation plus souple, comportant une zone pour les recherches (qui peut comprendre des opérations, mais aussi des schémas, du texte...) et une zone pour la solution rédigée.

Quatrième facteur :
On peut rarement retrouver un raisonnement à partir d'une opération.

Pour illustrer ce que nous entendons par là, voici un problème destiné à des adultes, et non à des élèves de l'école élémentaire.

Lors d'une kermesse, une classe vend des tartelettes à 2€ pièce et des flans à 1,50 €pièce. À la fin de la kermesse, la classe a vendu en tout 126 parts de gâteaux, et la recette est de 217 €.

Combien de gâteaux de chaque sorte ont été vendus ? Voici les étapes d'une solution :

126 x 2 = 252
252 - 217 = 35
2-1,50 = 0,50
35 : 0,50 = 70
126 - 70 = 56
Il a été vendu 70 flans et 56 tartelettes.

Il est possible que vous parveniez à reconstituer le raisonnement, mais ce n'est pas certain même pour un adulte cultivé. Cela vous sera difficile si votre raisonnement personnel est très éloigné de celui que nous avons utilisé.

Profitons-en pour rappeler la difficulté à reconnaitre une absurdité : il n'est pas impossible que certains jugent cette suite de calcul absurde avant de lire ce qui suit.

Voici maintenant la même solution commentée.
126 x 2 = 252

Si tous les gâteaux vendus étaient des tartelettes, la recette serait de 252 €
252 - 217 = 35
La recette réelle est inférieure de 35 € à ce qu'elle serait si on n'avait vendu que des tartelettes. 2-1,50 = 0,50
À chaque fois qu'on remplace une tartelette par un flan dans les ventes, la recette diminue de 0,50 € 35 : 0,50 = 70

Pour faire diminuer la recette de 35 €il faut la faire diminuer 70 fois de 0,50 €, c'est-à-dire remplacer 70 tartelettes par des flans. Il a donc été vendu 70 flans.

126 - 70 = 56
56 tartelettes ont été vendues.

Lors d’une mise en commun, d’une correction d’un problème un peu complexe, la trace écrite au tableau des étapes intermédiaires n’est parfois qu’une suite d’opérations, seule la dernière opération donnant lieu à une phrase d'explicitation. L'élève qui relit cette trace et ne parvient pas à reconstituer le raisonnement risque fort d'avoir le sentiment d'être devant un procédé magique dont les opérations sont l'essentiel.

Action possible :

On ne peut pas exiger que les élèves rédigent des explications à chaque étape, car la difficulté de rédaction s’ajouterait à la difficulté mathématique pour rendre la tâche insurmontable.

C’est donc au maitre, lors des phases de mise en commun ou de correction, d’expliciter le sens de chaque opération par écrit au tableau le plus souvent possible même si c’est fastidieux.

Cinquième facteur : Le travail de groupe

Dans les situations de travail de groupe, quand un élève cherche à en aider un autre, il lui dit généralement “il faut faire 12 fois 5” ou “il faut faire une soustraction”.

Cela ne porte pas à conséquence si l'autre élève a un avis différent sur la question : si l'un est convaincu qu'il faut poser une soustraction et l'autre qu'il faut poser une addition, les deux élèves seront probablement incités à justifier leur point de vue pour tenter de convaincre leur camarade.

Ce type "d'aide", donnée avec les meilleurs intentions est en revanche très néfaste pour un élève qui n'a pas encore assimilé les données du problème, ne s'est pas vraiment engagé dans la réflexion, et n'a plus aucun besoin de le faire.

Les enfants sont en général très pragmatiques et cherchent surtout à réaliser la tâche prescrite, c’est à dire à “avoir bon” au problème, il ne faut pas se faire d’illusion sur la qualité des arguments échangés lors de la résolution collective d’un problème.

Action possible :

Les considérations ci-dessus ne sont évidemment pas une raison pour renoncer à toute phase de travail à deux ou en petit groupe.

On peut probablement en limiter les effets en imposant systématiquement une phase de réflexion individuelle au démarrage de toute recherche. Il est également utile d'expliciter les caractéristiques d'une aide efficace.

Sixième facteur :
Les problèmes de vie courante.

Les programmes en vigueur à l'époque de l'écriture de ce texte (ceux de 2008) mentionnaient à plusieurs reprises les problèmes de vie courante. Le caractère familier des situations utilisées semblait, pour les auteurs de ces programmes, garantir des situations accessibles et propices à un apprentissage mathématique.

Malheureusement, les situations décrites dans les énoncés ne sont pas également familières à tous les élèves. Les élèves pour qui la situation n'est pas familière, ne pourront pas l'évoquer et seront donc conduits à chercher une réponse dans le texte et non dans la situation… précisément ce qu'on veut éviter.

De plus, les situations «de vie courante» peuvent comporter pour certains élèves de nombreux éléments parasites, affectifs par exemple, qui le détournent de la tâche de résolution de problème.

Mais il y a bien pire : dans un très grand nombre de problèmes trouvés dans les manuels, la solution attendue ne correspond pas à la réalité. De nombreux exemples sont fournis dans un autre document consacré spécifiquement aux problèmes de vie courante.

Les élèves qui connaissent la situation évoquée par un problème dont la solution attendue est incohérente avec la réalité risquent fort de conclure que les maths sont un lieu ou il faut faire des opérations sans se soucier de savoir si la conclusion qu'on en tire est vraie.

Action possible :

Avant tout s'assurer avant de poser aux élèves un problème de vie courante que la réponse attendue en mathématique est bien conforme à celle que fournit l'expérience.

D'autres pistes sont fournies dans le document consacré aux problèmes de vie courante. Elles sont parfois difficiles à mettre en œuvre, il vaut parfois mieux abandonner certains problèmes difficiles à rendre à la fois sérieux et accessibles aux élèves.

Septième facteur : Le mode de validation

Considérons le problème suivant :

Une caisse en bois arrive par avion et contient 6 cartons de jeux vidéos. Chaque carton pèse 1500 g. Sur la facture du transporteur, le poids de la caisse est 9,8 kg.

Quel est le poids de la caisse en bois lorsqu'elle est vide ?

Quand un élève pense avoir résolu ce problème, il ne pourra en général confirmer ou infirmer sa réponse que par la conformité avec celle du maitre ou des autres élèves.

Si on veut éviter le pur argument d'autorité, on cherchera plusieurs raisonnements possibles, on effectuera une vérification en recalculant la masse totale à partir du résultat trouvé. Tout cela est utile et probablement suffisant pour une bonne partie des élèves. Pour les autres, la situation changerait notablement si le problème portait sur des objets effectivement présents dans la classe de telle sorte que la boite dont on cherche le poids soit effectivement pesée après le calcul de son poids. Dans ce cas, l'erreur est manifeste et indiscutable : j'ai prévu que la boite pèserait 1500 g, elle en pèse 300, ça ne va pas, où me suis-je trompé ?

La question "où me suis-je trompé ?" est un progrès considérable permis par la validation à l'aide du matériel. Si ne matériel n'est pas présent ou s'il n'est pas utilisé pour valider, les élèves s'en tiennent plutôt à la question "est-ce que j'ai bon ?" qui n'a pas du tout la même portée intellectuelle.

Par ailleurs, cette validation à l'aide du matériel, qui est annoncée à l'avance, est une aide précieuse pour les élèves les plus fragiles pour entrer dans le problème. On s'attache toujours à ce que les élèves aient bien compris l'énoncé du problème, ce qui est nécessaire, mais insuffisant.

Il faut aussi que l'élève soit en projet de trouver ce qui est vrai, et non de "trouver la bonne réponse" "d'avoir tout juste". Les situations qui facilitent la validation par le matériel sont souvent également favorables cette mise en projet.

Insistons sur le fait que nous ne proposons pas de résoudre le problème à l'aide du matériel : le matériel est présent, mais l'activité mathématique consiste à prévoir le résultat d'une action (la pesée de la boite dans notre exemple) et non à effectuer l'action. La pesée n'a donc lieu qu'après qu'on ait trouvé la masse de la boite par une autre méthode.

Action possible :

Proposer aux élèves des problèmes dont la solution puisse être validée à l'aide du matériel n'est pas toujours facile. Quand c'est possible, cela augmente toujours la préparation nécessaire.

Nous ne proposons donc pas de passer de la situation la plus fréquemment observée en classe (la validation par le matériel n'est jamais possible) à une situation radicalement opposée ou cette validation serait toujours possible.

En revanche faire en sorte que cette validation soit parfois possible n'a que des avantages. Imaginons qu'on propose aux élèves le travail qui suit

"À la fin de la séance, nous fabriquerons des bandes de papier dont je vous donne les longueurs :

La bande A mesurera 18 cm.

La bande B mesurera 170 mm.

La bande C mesurera 1 dm et 50 mm

La bande D mesurera 1 dm et 9 cm

La bande E mesurera 17 cm et 5 mm

Votre travail consiste à classer les bandes de la plus petite à la plus grande, mais attention, je vous rappelle que vous n'avez pas le droit de les tracer tout de suite, nous les tracerons seulement à la fin et nous vérifierons si nous avons bien prévu en plaçant les bandes côte à côte".

On peut, plus tard, poser le même type de question avec des m et des km (et éventuellement hm et dam). Les longueurs en jeu ne permettent plus de vérifier expérimentalement, ce qui n'est pas très grave si le sens du travail a été bien compris dans la situation précédente.

Ce mode de validation a également l'intérêt d'être totalement indépendant de la procédure de résolution choisie (tout ramener en cm, tout en mm, effectuer des comparaisons deux à deux...) et donc de n'en privilégier aucune à priori.

Huitième facteur : Tu as compris ?

Quand les élèves sont confrontés à un problème et que le maitre fournit des explications individuelles, l’explication se termine souvent “tu as compris ?” question parfois purement rhétorique.

L’omniprésence de cette question conduit à un affaiblissement du sens du verbe comprendre. Un élève ayant compris qu’il fallait faire une multiplication (mais pas pourquoi) a compris quelque chose et peut donc légitimement répondre "oui".

Neuvième facteur : L'aide méthodologique

Ce qui est proposé comme «aide méthodologique» par certains manuels pousse-au-crime. On y dit explicitement qu'une étape essentielle dans la résolution de problème est de trouver la bonne opération...

C’est malheureusement le cas de toutes les méthodes basées sur l’enseignement aux élèves d’une adaptation de la classification des problèmes additifs due à Gérard Vergnaud.

Nous proposons dans la rubrique numérique pour le Cycle 2 une argumentation détaillée des raisons pour lesquelles cette classification, outil extrêmement intéressant pour les adultes, ne doit pas être enseignée aux élèves.