Des sommes pas trop grandes

En bref

Placer les nombres de 1 à 16 dans une grille carrée et calculer les sommes par ligne et par colonne.

La plus grande des 8 sommes doit être aussi petite que possible.

Introduction du problème

Je place les nombres de 1 à 16 dans cette grille carrée.

9	1	5	15
4	8	13	14
3	2	7	12
10	11	6	16

Je calcule la somme des nombres de chaque ligne et aussi de chaque colonne puis j'entoure en rouge la plus grande des huit sommes que j'ai calculées : 57

9	1	5	15	30
4	8	13	14	39
3	2	7	12	24
10	11	6	16	43
26	22	31	57	

— Vous allez faire le même travail en essayant d'obtenir un nombre entouré plus petit que 57. Si la plus grande somme est 56, vous avez disposé les nombres mieux que moi. Si vous obtenez 55 ou 54. . . ou encore moins, c'est encore mieux.

— Quand les nombres sont placés dans la grille, il reste des opérations à effectuer, mais on ne peut plus améliorer le résultat.

L'enseignant conseille de travailler au crayon pour pouvoir modifier quelques nombres de la grille sans tout recommencer à zéro.

Éléments de relance

L'enseignant montre comment, en échangeant deux nombres d'une même colonne ou d'une même ligne, on peut améliorer une grille sans devoir refaire tous les calculs :

Pour améliorer l'exemple utilisé pour expliquer le problème on peut choisir d'inverser la place des nombres 6 et 16. Seules les sommes de la troisième et de la quatrième colonne seront modifiées.

De plus il n'est même pas indispensable de les recalculer entièrement : dans la troisième colonne on remplace 6 par 16 sans changer les autres nombres, la somme va augmenter de 10. La somme de la quatrième colonne diminuera de 10.

9	1	5	15	30
4	8	13	14	39
3	2	7	12	24
10	11	16	6	43
26	22	~~31~~	~~57~~	
		41	47	

Cette astuce permet de limiter le nombre de calculs à effectuer, mais rien n'assure qu'on peut trouver ainsi la meilleure solution.

Éléments de preuve

Après quelques tentatives, l'enseignante pose cette question : la réponse que nous avons actuellement est-elle la meilleure possible ? quand faudra-t-il s'arrêter ?

10	15	13	1	39
5	9	4	12	30
3	8	6	16	33
14	2	7	11	34
32	34	30	40	

Si la meilleure réponse connue à ce stade est celle reproduite ci-dessus, l'enseignante reproduit au tableau ce schéma :

Quel résultat final peut-on obtenir ?

27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40

Le cercle vert autour du nombre 40 signifie qu'on sait obtenir 40... mais peut-on faire mieux ?

Y a-t-il des nombres dont on est certain qu'on ne les obtiendra jamais .

Des élèves feront probablement les remarques suivantes :

— Une ligne contient le nombre 16, la somme de cette ligne vaut au moins 16. On ne peut pas avoir comme résultat final 15.
— La ligne qui contient 16 contient aussi 3 autres nombres, elle vaut au moins 19. On ne peut pas avoir comme résultat final 18.
— La ligne qui contient 16 contient 3 autres nombres *différents,* elle vaut au moins 16+1+2+3 soit 22. On ne peut pas avoir comme résultat final 21.

Si aucun élève ne fait ces remarques, l'enseignante fait elle-même la première, ce qui le plus souvent suffit à déclencher les améliorations qui suivent.

Le schéma au tableau est alors mis à jour :

Quel résultat final peut-on obtenir ?

~~19~~ ~~20~~ ~~21~~ 22 23 .... 39 40

La marge est encore importante : on sait obtenir 40 et on sait qu'il est impossible d'obtenir 21 ou moins, mais entre les deux, on ne sait rien.

La remarque suivante permet de réduire un peu l'incertitude :

Les nombres 12 13 14 15 et 16 ne peuvent pas être écrits sur 5 lignes différentes puisqu'il n'y a que 4 lignes. Il y a donc une ligne qui contient deux de ces nombres. Elle vaut au minimum 12+13+1+2 soit 28. On ne peut pas avoir comme résultat final 27.

Quel résultat final peut-on obtenir ?

~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ 28 29 .... 39 40

L'état des connaissances est un peu plus satisfaisant... d'autant que dans le même temps le résultat 40 a probablement été amélioré.

L'enseignante ne fait observer ce qui suit que quand les élèves sont parvenus à des résultats voisins de 35.

La somme des 4 sommes par ligne et la somme des 4 sommes par colonnes sont égales. Elles valent chacune 136... et ceci pour toutes les dispositions de nombres déjà proposées.

S'agit-il d'une coïncidence ? Peut-on au contraire expliquer qu'il en sera de même pour toutes les autres dispositions que nous pourrons trouver ?

L'enseignante laisse les élèves réfléchir à cette question puis, si aucun élève ne propose d'explication, montre que les deux calculs reviennent en fait à calculer la somme des nombres de 1 à 16 (seul l'ordre diffère).

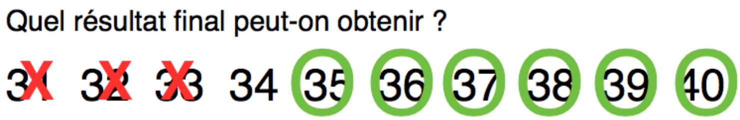
La somme des 4 sommes par ligne est donc toujours égale à 136.

Rapprochons ce résultat et les indications du dernier schéma.

Selon le schéma, on ne sait pas s'il est possible d'obtenir un résultat final égal à 28. Imaginons qu'on trouve une disposition où le résultat final est 28. Alors chacune des 4 sommes par ligne vaut 28 ou moins de 28. Leur somme est donc égale à 4×28, c'est-à-dire 112, ou plus petite que 112. C'est impossible puisque cette somme vaut 136

On montre de la même façon que les nombres suivants jusqu'à 33 ne peuvent pas être atteints non plus. Par exemple, si le résultat final était 33, la somme des 4 lignes serait égale à 132, ou plus petite que 132.

Si le meilleur résultat disponible est 35, le schéma résumant le travail de la classe sur ce problème est alors celui-ci :



Une seule incertitude demeure : peut-on obtenir 34 ?

12	14	7	1	34
11	13	2	8	34
6	3	10	16	35
4	5	15	9	33
33	35	34	34	

Aménagements pour le cycle 2

Commencer par poser le problème avec les nombres de 1 à 9 sur une grille de 9 cases.

Prolongements pour le cycle 4

On peut évidemment faire le même travail sur des grilles de 25 ou 36 nombres mais, quand on a remarqué que la meilleure disposition possible est un carré magique il est facile de trouver des solutions sur internet. Il nous semble préférable de proposer un travail analogue où l'on calcule le produit des nombres de chaque ligne et de chaque colonne.

Un tableau de 9 nombres suffit alors à rendre le problème consistant

1	7	8	56
4	2	9	72
5	3	6	90
20	42	432	

Il n'existe aucune solution « simple » analogue au carré magique, car il n'est pas possible d'obtenir des produits tous égaux.

On peut le montrer à l'aide des nombres premiers (le facteur 5 figure dans un seul des trois produits par ligne)

On peut aussi faire observer que si on obtenait des produits égaux à P sur les lignes, on aurait :

$P \times P \times P = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 362880$

Par essais successifs de valeurs de P, on constate que 71 est trop petit et 72 trop grand, aucune valeur entière ne convient donc.

Les élèves trouveront assez rapidement une solution où le plus grand produit est égal à 90, par exemple celle-ci.

8	4	2	64
1	7	9	63
6	3	5	90
48	84	90	

En revanche, prouver qu'il est impossible de faire mieux n'est pas facile.

On peut cependant observer que le plus grand produit est supérieur à 71 et que, parmi les entiers strictement compris entre 71 et 90, seuls 72, 80, 84 peuvent être écrits comme le produit de trois entiers de 1 à 9 différents.

Il reste un certain nombre de cas à étudier, nous laissons au lecteur intéressé (et éventuellement à ses élèves) le plaisir de découvrir si l'étude systématique de ces cas conduit à une solution meilleure que 90 ou si elle prouve qu'une telle solution n'existe pas.

Une recherche analogue sur une grille de 16 nombres trouve aisément sa place dans le classeur de recherche. On se limitera alors à une recherche de « bons » exemples, sans chercher à prouver qu'on a atteint l'optimum.

L'exemple ci-dessous n'est pas trop mauvais.

1	13	15	11	2145
14	3	9	6	2268
10	12	2	8	1920
16	5	7	4	2240
2240	2340	1890	2112	

Compléments

Peut-on obtenir 34 ? Oui.

1	14	11	8	34
12	7	2	13	34
6	9	16	3	34
15	4	5	10	34
34	34	34	34	

Voici une solution pas trop mauvaise pour le problème des produits pas trop grands proposé comme prolongement pour le cycle 4… Peut on trouver mieux ?

10	15	13	1	1950
5	9	4	12	2160
3	8	6	16	2304
14	2	7	11	2156
2100	2160	2184	2112	