Une pyramide de nombres

En bref

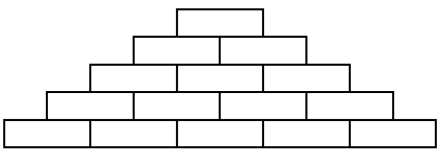
Écrire un nombre entier dans chaque case de la pyramide en respectant les critères suivants :
- Le nombre écrit sur une brique est la somme des nombres des briques sur lesquelles elle est posée (sauf pour la rangée du bas évidemment).
- Les nombres sont tous différents.

Le nombre écrit au sommet doit être le plus petit possible.

Ce problème donne l'occasion de calculer (mentalement de préférence) de nombreuses petites sommes. C'est pourquoi il semble important que la calculatrice ne soit pas disponible.

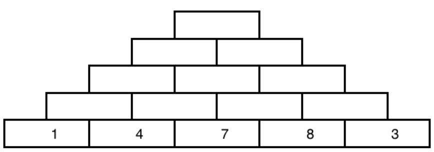
Introduction du problème

Le dessin suivant est affiché ou projeté.



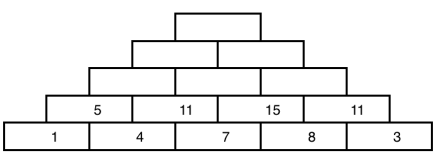
J'écris un nombre dans chaque case de cette pyramide (on précise un *nombre entier* si les élèves connaissent d'autres nombres que les entiers : fractions ou décimaux).

Je commence par la rangée du bas.

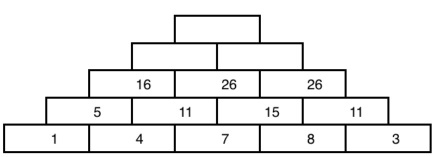


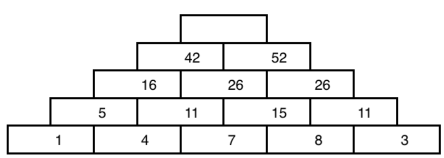
Ensuite, je ne peux plus choisir les nombres.

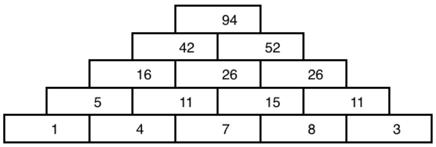
Chaque case de la deuxième rangée contient la somme des deux nombres sur lesquels elle est posée.



Les rangées suivantes se remplissent de la même façon.







Il vous manque encore une règle et un but pour pouvoir travailler.

Voici la règle : tous les nombres écrits sur la pyramide doivent être différents. Mon exemple ne convient donc pas, car il contient deux fois le nombre 11 et deux fois le nombre 26.

Voici le but : le nombre écrit au sommet de la pyramide doit être le plus petit possible.

Éléments de relance

Quelqu'un a-t-il obtenu moins de 20 dans la case du sommet ?

Moins de 30 ? De 40 ? De 50 ?...

Les auteurs de quelques-unes des meilleures réalisations viennent les reproduire au tableau (on convient qu'il n'est pas nécessaire de dessiner les briques, écrire les nombres suffit).

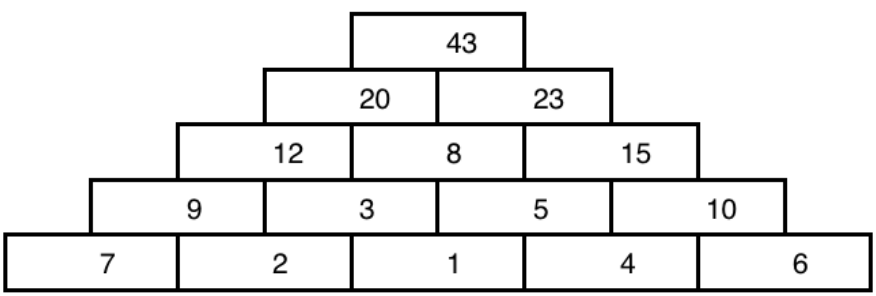
Les deux remarques suivantes seront probablement faites :
- — pour obtenir un petit nombre au sommet, il faut écrire de petits nombres sur la ligne du bas.
- — on ne peut pas se servir de 0 parce qu'alors il y a forcément deux nombres égaux (un voisin de 0 et la somme de ce voisin et de 0).

L'enseignante laisse aux élèves le temps de s'apercevoir que les mêmes nombres sur la ligne du bas peuvent donner des nombres au sommet différents selon leur position. Quand cette remarque est faite, elle leur proposer l'expérience suivante :

— Nous allons abandonner un instant la règle des nombres tous différents. Nous nous contenterons d'avoir 5 nombres différents sur la première ligne... tant pis s'il y a des nombres égaux ensuite. Je suppose que vous serez d'accord pour écrire 1, 2, 3, 4 et 5 sur la première ligne... mais comment faut-il les placer ? Allez-y, essayez.

Les élèves constatent qu'il y a plusieurs dispositions conduisant à un sommet de 35 : le 1 est toujours au centre, encadré par 2 et 3. Cela ne constitue pas une preuve, mais incite à chercher des dispositions où les plus petits nombres sont placés au centre ou près du centre.

Cette solution est généralement trouvée assez rapidement



L'enseignante laisse les élèves chercher un peu à améliorer cette solution, mais peut assez vite proposer le même problème sur une pyramide plus grande (problème qui sera laissé ouvert dans le classeur de recherches).

Éléments de preuve

l'enseignante remplit au tableau une pyramide en écrivant les opérations et non leur résultat :

2+3+3+4+3+4+4+6+3+4+4+6+4+6+6+1

2+3+3+4+3+4+4+6 3+4+4+6+4+6+6+1

2+3+3+4 3+4+4+6 4+6+6+1

2+3 3+4 4+6 6+1

2 3 4 6 1

Cela met en évidence que le nombre placé dans la case centrale est compté 6 fois au sommet, ses voisins 4 fois et les nombres des extrémités seulement une fois.

Si on ne tient pas compte des doublons, la plus petite somme est obtenue en plaçant 1 au centre, entouré de 2 et 3, puis de 4 et 5. elle vaut $(6 \times 1) + (4 \times 2) + (4 \times 3) + 4 + 5$ soit 35.

On peut à ce stade résumer les connaissances de la classe par le schéma suivant :

Quels nombres peut-on obtenir en haut de la pyramide ?

~~34~~ 35 36 37 38 39 40 41 42 43

On sait obtenir 43 au sommet de la pyramide. On sait aussi qu'il est impossible d'obtenir moins de 35.

Cependant, la disposition avec 1 au centre entouré par 2 et 3 n'est pas conforme à la règle de ce problème : $1+2=3$, il y a donc deux fois le nombre 3.

La plus petite somme envisageable est alors obtenue en plaçant le 1 au centre entouré de 2 et 4 puis de 3 et 5. Elle vaut $(6 \times 1) + (4 \times 2) + (4 \times 4) + 3 + 5$ soit 40.

On peut à ce stade résumer les connaissances de la classe par le schéma suivant :

Quels nombres peut-on obtenir en haut de la pyramide ?

~~34~~ ~~35~~ ~~36~~ ~~37~~ ~~38~~ ~~39~~ 40 41 42 43

On sait obtenir 43 au sommet de la pyramide. On sait aussi qu'il est impossible d'obtenir moins de 40.

Nous pensons raisonnable de s'en tenir là au cycle 3.

Aménagements pour le cycle 2

Le problème peut être proposé dans les mêmes conditions qu'au cycle 3 dès que les élèves sont en mesure de calculer en calcul réfléchi les sommes rencontrées.

Prolongements pour le cycle 4

Utiliser l'écriture algébrique facilite l'organisation d'une recherche exhaustive si l'on veut prouver que la disposition conduisant à 43 est optimum.

a, b, c, d et e étant les nombres du bas (dans cet ordre), le sommet contient a+4b+6c+4d+e.

Un calcul de 4b+6c+4d pour les petites valeurs de b, c et d permet de constater qu'il y a assez peu de cas à étudier (4b+6c+4d $<$ 40 est une condition nécessaire bien que largement insuffisante).

Dans beaucoup des cas restants a+4b+6c+4d+e est trop grand même en donnant à a et e les plus petites valeurs encore disponibles.

Il reste très peu de cas pour lesquels le calcul des valeurs intermédiaires est nécessaire pour s'assurer qu'il n'y a pas de doublon.

On peut également proposer aux élèves de traiter le même problème avec des pyramides plus grandes, éventuellement en utilisant un tableur.

Compléments

On obtient une « bonne » pyramide d'un étage de plus que ce qu'on a déjà étudié en partant de la meilleure pyramide à connue et en testant systématiquement les plus petites valeurs disponibles à droite ou à gauche de sa ligne de base. Cependant, il n'est pas certain qu'on obtient ainsi l'optimum.

								1000								
							489		511							
						277		212		299						
					175		102		110		189					
				116		59		43		67		122				
			77		39		20		23		44		78			
		50		27		12		8		15		29		49		
	32		18		9		3		5		10		19		30	
21		11		7		2		1		4		6		13		17

Si on veut prouver que la valeur 43 est optimum, il faut envisager tous les cas possibles.

	Valeur centrale			
2	1	3		Doublon du 3
2	1	4		30
2	1	5		34
3	1	4		Doublon du 4
2	1	6		38
3	1	5		38
2	1	7		42
3	1	6		42
4	1	5		Doublon du 5
1	2	3		Doublon du 3
1	2	4		32
1	2	5		36
1	2	6		40
3	2	4		40
1	3	2		30
1	3	4		Doublon du 4
1	3	5		42
1	4	2		36
1	4	3		40

Le tableau qui précède est une des façons d'entamer cette recherche systématique.

Il est construit ainsi :

- On étudie d'abord tous les cas où le nombre central est 1 puis ceux où c'est 2…
- Pour chaque valeur du nombre central, on attribue à ses voisins les plus petites valeurs disponibles, puis des valeurs de plus en plus grandes.
- La colonne de droite peut donner deux indications :
  - S'il existe un doublon parmi les 3 nombres centraux et les deux sommes écrites juste au dessus, il est indiqué.
  - Sinon, elle donne la valeur de 6a+4b+4c (a étant le nombre central, b et c ses voisins). Seuls les cas où cette valeur est inférieure à 43 sont reportés dans le tableau.

Pour savoir s'il existe une disposition conduisant à un sommet inférieur à 43, il reste à ajouter une colonne au tableau en ajoutant à la somme déjà calculée les valeurs des extrémités de la base (les plus petites valeurs encore disponibles).