La démonstration en géométrie
les règles du jeu

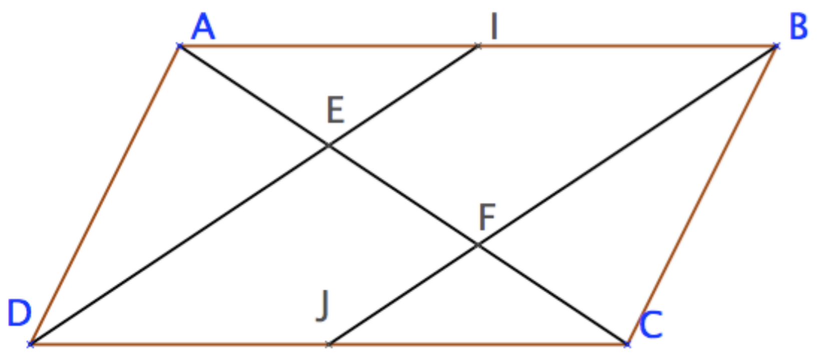
Ce document comporte plusieurs réponses rédigées pour un même problème de démonstration géométrique. Ces réponses sont critiquées (nous vous conseillons d'effectuer votre propre critique avant de lire celle du texte).

L'objectif du travail est d'expliciter les «règles du jeu» de ce type de problème, tout en commençant à élaborer un répertoire des propriétés les plus souvent utilisées et donc indispensables à mémoriser pendant la préparation du CRPE.

Énoncé du problème

ABCD est un parallélogramme. I est le milieu de [AB], J est le milieu de [DC].
(DI) et (AC) se coupent en E.
(BJ) et (AC) se coupent en F.

Démontrer que E est le milieu de [AF].



Version 1

J'ai fait plusieurs figures et reporté les mesures AE et EF dans le tableau ci-dessous :

Numéro de la figure	1	2	3	4	5
Longueur AE en mm	27	31	18	19	24
Longueur EF en mm	27	31	18	19	24

On constate que sur toutes les figures AE = EF, donc E est le milieu de [AF].

Cette version contrevient à deux règles de la démonstration :

Une démonstration ne peut pas utiliser de mesures prises sur la figure par le rédacteur à l'aide d'une règle graduée ou d'un autre instrument. En effet, quand on effectue une mesure, il y a toujours une incertitude.
Par exemple, si on trouve à l'aide de la règle qu'un segment mesure 40 mm, on est seulement certain (si la mesure est faite soigneusement) que la longueur de ce segment est entre 39 et 41 mm.

Par ailleurs, l'accumulation d'exemples n'est pas considérée comme une preuve valide. Bien sûr, si deux longueurs semblent égales sur vingt dessins aussi différents que possible, on n'a pas de doute sur le fait qu'elles seront encore égales sur les autres dessins envisageables.
Mais ce n'est pas ce qui est attendu. D'ailleurs, puisque l'énoncé demande de prouver que E est le milieu de [AF] on sait avant de commencer qu'il l'est.
Le travail attendu ne consiste donc pas à convaincre que E est le milieu de [AF], mais à construire une chaine de déductions prouvant qu'il l'est, en s'appuyant uniquement sur les affirmations présentes dans l'énoncé et sur les propriétés géométriques classiques supposées connues.

Enfin (ce point ne relève pas des règles du jeu, mais de la connaissance des propriétés géométriques) il ne suffit pas de prouver que AE = EF pour prouver que E est le milieu de [AF]. Si AEF est un triangle isocèle en E, AE = EF et pourtant E n'est pas le milieu de [AF].

Version 2

Dans le triangle ABF, la droite (DI) passe par le milieu du côté [AB] et est parallèle au côté [BF] donc elle passe par le milieu du côté [AF] qui est donc le point E.

Pour décider d'accepter ou non cette démonstration, le correcteur se posera plusieurs questions :

Cette phrase fait-elle référence à un théorème connu ?

Oui, on reconnait le théorème «Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, elle passe par le milieu du troisième côté».

Les conditions dans lesquelles on peut appliquer ce théorème sont-elles clairement citées ?

Oui, il est question :

- *d'un triangle,*
- *du milieu d'un de ses côtés*
- *d'une parallèle à un autre côté passant par ce milieu.*

Ces conditions figurent-elles dans l'énoncé, ou bien sont-elles une reformulation évidente de l'énoncé ?

Les deux premières conditions ne posent pas de problème, mais le parallélisme des droites (DI) et (BF) ne figure pas dans l'énoncé. Il faut donc le prouver avant de s'en servir.

Ceci explique pourquoi ***les démonstrations correctes comportent presque toujours des répétitions****.*
Une affirmation apparait d'abord comme conclusion d'une étape:

«bla bla bla...donc (DI) est parallèle à (BF)»

Elle est ensuite reprise comme élément de départ d'une autre étape :

« (DI) est parallèle à (BF) et bla bla bla donc bla bla bla»

Cette version est donc une étape envisageable d'une démonstration correcte. Elle ne constitue pas à elle seule une démonstration correcte et ne rapporterait aucun point.

Version 3

- B et D sont deux sommets opposés d'un parallélogramme, I et J sont les milieux de deux côtés opposés du même parallélogramme, donc les droites (BJ) et (DI) sont parallèles, ce qui revient à dire que (DI) est parallèle à (BF)
- Dans le triangle ABF, la droite (DI) passe par le milieu du côté [AB] et est parallèle au côté [BF] donc elle passe par le milieu du côté [AF] qui est donc le point E.

La deuxième étape de cette démonstration est identique à l'étape unique de la version 2.
Elle est entièrement correcte puisque l'affirmation (DI) // (BF) est démontrée à l'étape précédente.
En revanche la première étape n'est pas correcte : il n'existe aucune propriété classique utilisant les données évoquées ici (deux sommets opposés et les milieux de deux côtés opposés d'un parallélogramme).
*La propriété invoquée n'est pas acceptable **même si elle est vraie**.*

Le fait que des propriétés vraies puissent être refusées au concours choque certains candidats, mais il ne peut pas en être autrement.

Imaginons en effet qu'on décide d'accepter toutes les propriétés vraies, même non classiques. Toute démonstration se résumerait alors à recopier l'énoncé et à affirmer que dans ces conditions, on sait que la conclusion est vraie.

Pour éviter cette situation absurde, il est nécessaire à tout groupe de personne faisant des mathématiques de convenir d'un corpus de théorèmes qui sont considérés comme vrais dans ce groupe, sans avoir à être démontrés à nouveau.
Pour la communauté mathématique du CRPE, ce corpus est constitué par les théorèmes au programme du collège.

Version 4

- J'utilise dans l'étape suivante le fait que les droites (DI) et (BF) sont parallèles. Il faudrait le prouver au préalable pour que la démonstration soit complète, je n'y parviens pas.

- Dans le triangle ABF, la droite (DI) passe par le milieu du côté [AB] et est parallèle au côté [BF] donc elle passe par le milieu du côté [AF] qui est donc le point E.

L'auteur a compris qu'il faut prouver que (DI) // (BF), et résiste à la tentation de bricoler un théorème pour faire semblant de l'avoir prouvé.

La seconde étape, identique à la version 2, serait valorisée, car sa lacune est clairement identifiée à l'étape précédente.

C'est la première version qui rapporterait des points au CRPE.

Version 5

E sera le milieu de [AF] si on parvient à prouver que (DI) // (BJ) car on pourra alors utiliser le théorème de la droite des milieux. Pour prouver que ces droites sont parallèles, il faut prouver que le quadrilatère BIDJ est un parallélogramme ce qui est le cas puisqu'il a deux côtés opposés parallèles et égaux (BI et DJ) parce que ces côtés sont eux-mêmes les moitiés de deux côtés opposés d'un autre parallélogramme : ABCD est un parallélogramme par hypothèse et de plus I est le milieu de [AB] et J celui de [CD]).

Un style de rédaction à éviter à tout prix, car il est incompréhensible.
On ne vous demande pas de raconter votre recherche mais de construire une suite d'étapes brêves, facilement vérifiables.
Cette production ne serait probablement même pas lue jusqu'au bout.
Enseigner consistant pour une part importante à fournir des explications claires et simples, le jury n'envisagera pas avec enthousiasme le recrutement comme professeur des écoles de l'auteur de ce charabia. Non seulement ce type de production ne rapporte rien, mais il ne pousse pas le jury à faire preuve d'indulgence en cas d'hésitation à propos d'une autre question.

Version 6

D'après les propriétés des parallélogrammes, (DI) est parallèle à (BJ).
On peut alors utiliser le théorème de la droite des milieux qui permet d'affirmer que E est le milieu de [AF].

Beaucoup trop vague :

- *quelle(s) propriété(s) des parallélogrammes utilise-t-on,*
- *quelle propriété liée aux milieux dans un triangle utilise-t-on,*
- *appliquée à quel triangle ?*

Version 7

I est le milieu de AB donc BI = $\frac{AB}{2}$

De même DJ = $\frac{DC}{2}$

ABCD est un parallélogramme donc AB = DC.
il en résulte que $\frac{AB}{2} = \frac{DC}{2}$, donc que BI = DJ.

- ABCD est un parallélogramme donc les droites AB et DC sont parallèles.
  Or I est sur AB et J est sur DC donc BI et DJ sont parallèles.
- Les côtés opposés BI et DJ du quadrilatère non croisé BIDJ sont à la fois parallèles et de même longueur, donc BIDJ est un parallélogramme.
- BIDJ est un parallélogramme, donc DI est parallèle à BJ (et donc à BF qui est la même droite).
- Dans le triangle ABF, la droite (DI) passe par le milieu du côté [AB] et est parallèle au côté [BF] donc elle passe par le
  milieu du côté [AF] qui est donc le point E.

Cette version ne respecte pas certaines conventions d'écriture :

- *[AB] pour le segment d'extrémités A et B,*
- *(AB) pour la droite passant par A et par B,*
- *AB pour la longueur du segment [AB].*

Le jury du CRPE est traditionnellement très exigeant sur ce point (cf rapports de jurys), probablement même trop exigeant. Si on écrit «le segment AB», l'absence de crochets ne crée aucune ambigüité sur le sens, mais serait probablement pénalisée. Moralité : dans un concours, même quand le jury a tort, il a raison.

Voici une version rectifiée, conforme aux usages sur ce point :

I est le milieu de [AB] donc BI = $\frac{AB}{2}$

De même DJ = $\frac{DC}{2}$

ABCD est un parallélogramme donc AB = DC.
il en résulte que $\frac{AB}{2} = \frac{DC}{2}$, donc que BI = DJ.

- ABCD est un parallélogramme donc les droites (AB) et (DC) sont parallèles. Or I est sur (AB) et J est sur (DC) donc (BI) et (DJ) sont parallèles.
- Les côtés opposés [BI] et [DJ] du quadrilatère non croisé BIDJ sont à la fois parallèles et de même longueur, donc BIDJ est un parallélogramme.
- BIDJ est un parallélogramme, donc (DI) est parallèle à (BJ) (et donc à (BF) qui est la même droite).
- Dans le triangle ABF, la droite (DI) passe par le milieu du côté [AB] et est parallèle au côté [BF] donc elle passe par le milieu du côté [AF], qui est donc le point E.

Cette version ne cite aucun théorème ce qui ne serait pas reproché.

*On peut remplacer « *ABCD est un parallélogramme donc AB = DC* » par « *ABCD est un parallélogramme donc ses côtés opposés ont la même longueur, alors AB = DC* » pour mieux évoquer le théorème qu'on utilise.*

*Écrire au préalable le théorème « *Les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur* » n'est pas exigé et n'apporte rien de plus*

Version 8

A est un point de (EC) et I est un point de (ED). De plus (AI) // (DC).
Le théorème de Thalès, appliqué aux triangles EAI et EDC dit alors que $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$

$\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$ donc AE = $\frac{1}{2}$ EC ou encore AE = $\frac{1}{3}$ AC

On montre de la même façon que CF = $\frac{1}{3}$ AC

EF = AC – AE – FC = AC – $\frac{1}{3}$ AC – $\frac{1}{3}$ AC = $\frac{1}{3}$AC

AE = $\frac{1}{3}$ AC et EF = $\frac{1}{3}$ AC donc AE = EF.

AE = EF et E est sur [AF] donc E est le milieu de [AF].

Le théorème de Thalès permet seulement de conclure que $\frac{AE}{EC} = \frac{AI}{CD}$.

Il reste à prouver que CD = 2 AI. L'étape manquante étant plus simple que ce qui est rédigé, cette version obtiendrait probablement une partie importante des points.

Version 9

Le parallélogramme EBCD est symétrique par rapport à son centre O, intersection des diagonales. Il en résulte que, dans la symétrie de centre O, D et I sont respectivement symétriques de B et J. Les droites (DI) et (BJ) sont donc symétriques par rapport à O par conséquent elles sont parallèles.
Dans le triangle ABF, la droite (DI) passe par le milieu de [AB] et est parallèle au côté [BF], donc elle passe par le milieu du côté [AF] qui est alors le point E.

Rien à dire, ce candidat impressionne le jury.

Version 10

ABCD est un parallélogramme, donc ses diagonales se coupent en leur milieu (que nous nommerons O). O est donc le milieu de [BD].

Dans le triangle ABD, O est le milieu de [BD] et I celui de [AB] par conséquent [AO] et [DI] sont les médianes issues de A et de D. Leur intersection E est donc le centre de gravité de ABD.

E est le centre de gravité de ABD donc AE = $\frac{2}{3}$ AO

On prouve de la même façon que FC = $\frac{2}{3}$ CO

O est le milieu de [AC] donc AO = CO = $\frac{AC}{2}$

Il en résulte que AE = CF = $\frac{2}{3} \times \frac{AC}{2} = \frac{AC}{3}$

$$\mathrm{EF} = \mathrm{AC} - \mathrm{AE} - \mathrm{FC} = \mathrm{AC} - \frac{AC}{3} - \frac{AC}{3} = \frac{AC}{3}$$

On a donc EF = AE, or E est sur [AF] c'est donc le milieu de [AF].

Version correcte également.

Le correcteur ne cherche pas à vérifier si la proposition du candidat est plus ou moins conforme à un corrigé type, mais si elle respecte les règles de la démonstration géométrique : le candidat a-t-il rédigé une suite de déductions s'appuyant sur des propriétés connues et sur les données de l'énoncé ?

Toute proposition répondant à ce critère est valide.

Version 11

On sait que les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles deux à deux or, par hypothèse, ABCD est un parallélogramme dont [AB] et [DC] sont deux côtés opposés.
On en conclut que (AB) // (DC)

Par hypothèse I est le milieu de [AB] donc les droites (BI) et (AB) sont confondues.
Par hypothèse J est le milieu de [DC] donc les droites (DJ) et (DC) sont confondues.
(BI) est confondue avec (AB), (DJ) est confondue avec (DC), par ailleurs (AB) et (DC) sont paralllèles, donc (BI) et (DJ) sont parallèles.

Par hypothèse I est le milieu de [AB] donc BI = AB/2
Par hypothèse J est le milieu de [CD] donc DJ = CD/2
On sait que les côtés opposés d'un parallélogramme sont deux à deux de même longueur or, par hypothèse, ABCD est un parallélogramme dont [AB] et [DC] sont deux côtés opposés.
On en conclut que AB // DC
Comme AB = DC, AB/2 = DC/2
On a : BI = AB/2 ; AB/2 = DC/2 ; DC/2 = DJ donc BI : DJ

On sait qu'un quadrilatère non croisé dont deux côtés opposés sont à la fois parallèles et de même longueur est un parallélogramme.
Or, le quadrilatère BIDJ est non croisé et on a montré ci-dessus que ses côtés opposés [BI] et [DJ] sont parallèles. Donc, le quadrilatère BIDJ est un parallélogramme.

On sait que les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles deux à deux or on vient de prouver que BIDJ est un parallélogramme et [DI] et [BJ] en sont deux côtés opposés.
On en conclut que (DI) // (BJ).

Par hypothèse les droites (BJ) et (AC) se coupent en F, F est donc un point de (BJ). F est un point de (BJ) donc les droites (BF) et (BJ) sont confondues.
On a montré que (DI) // (BJ) or (BF) et (BJ) sont confondues donc (DI) // (BF).

On sait qu'une droite qui passe par le milieu d'un côté d'un triangle et qui est parallèle à un autre côté de ce triangle passe par le milieu du troisième côté or, la droite (DI) passe par le milieu I du côté [AB] du triangle ABF et est parallèle au côté [BF], donc elle passe par le milieu du côté [AF].

La droite (DI) passe par le milieu de [AF].
F est l'intersection de (BJ) et (AC) donc F est sur (AC), il en résulte que [AF] est porté par la droite (AC).
Le milieu de [AF], intersection de (DI) et (AF) est donc aussi l'intersection de (DI) et [AC], c'est le point E.

Beaucoup trop long.
À force de vouloir tout prouver, on ne distingue plus l'essentiel.
À éviter : même si le résultat est accepté, rédiger ce type de preuve consomme énormément de temps pour un résultat qui n'est pas meilleur que les précédents.