

## Étiquettes

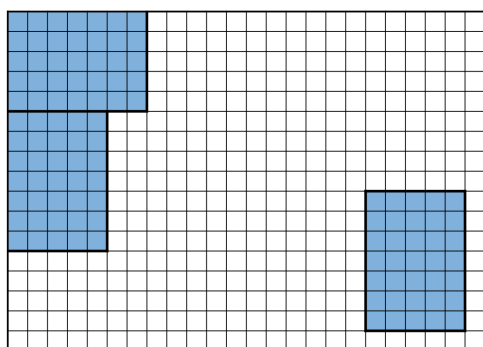
### En bref

Il s'agit de découper dans une grille rectangulaire de dimensions 24x17 le plus possible d'étiquettes de dimension 7x5

### Introduction du problème

Nous allons travailler sur des rectangles comme celui que j'ai affiché. Tous les rectangles sont identiques, ils ont 24 carreaux de long et 17 carreaux de large.

Dans ces rectangles, vous allez dessiner des étiquettes comme j'ai commencé à le faire. Toutes les étiquettes ont 7 carreaux de long et 5 de large.

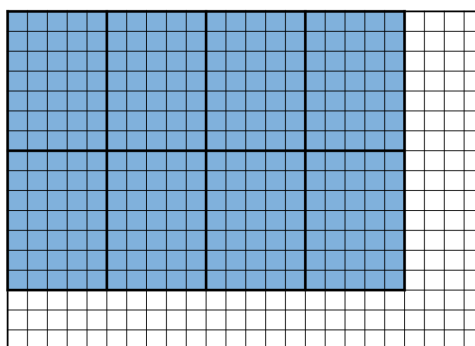
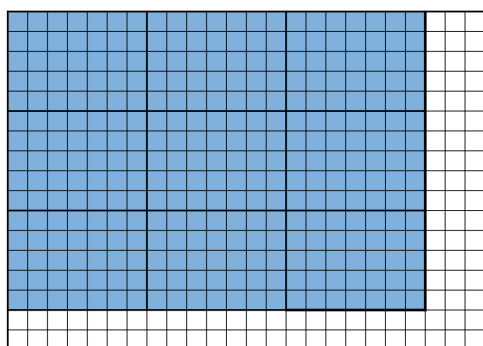


Le but est de placer dans le grand rectangle le plus possible d'étiquettes, si vous réussissez à en placer 8 c'est bien, mais 9 c'est mieux, 10 encore mieux, et ainsi de suite.

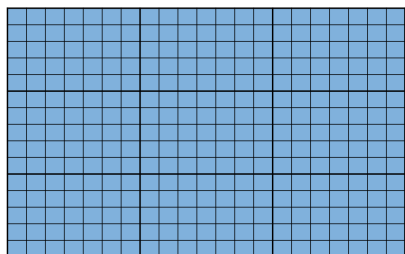
Pendant la recherche, l'enseignante encourage les élèves à dessiner à main levée : l'important ici est de chercher des idées sur la façon de placer les étiquettes, pas de réaliser un dessin impeccable.

### Éléments de relance

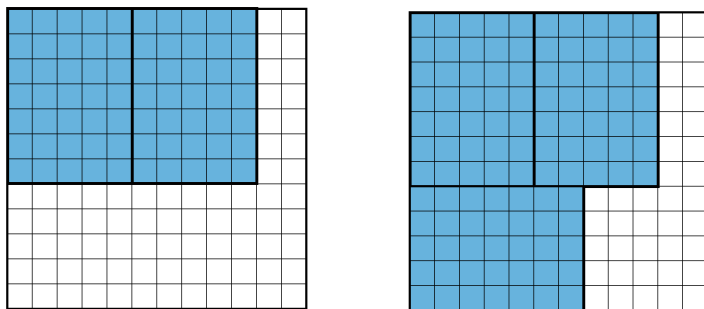
Bien que l'exemple fourni par l'enseignante n'oriente pas toutes les étiquettes de la même façon, il est fréquent que certains élèves s'imposent cette contrainte. Ils ne peuvent alors pas placer plus de 9 étiquettes (ou 8 dans l'autre sens).



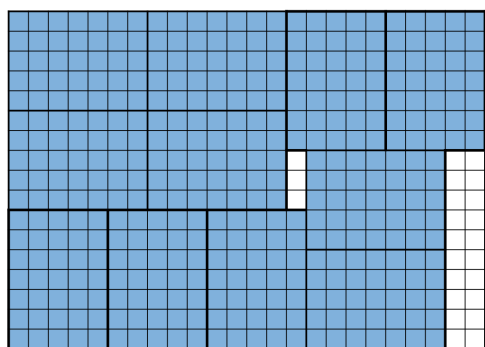
L'enseignante indique que placer les étiquettes toutes dans le même sens n'est pas une mauvaise idée : si je vous avais donné un rectangle de 21 carreaux sur 15, en plaçant les étiquettes comme ça vous l'auriez complètement rempli, on ne pourrait pas faire mieux.



Sur d'autres grilles, il vaut mieux ne pas placer toutes les étiquettes dans le même sens. Sur un carré de 12 cases de côté, en mettant toutes les étiquettes dans le même sens, on ne peut en placer que 2. En utilisant les deux sens, on peut faire mieux.

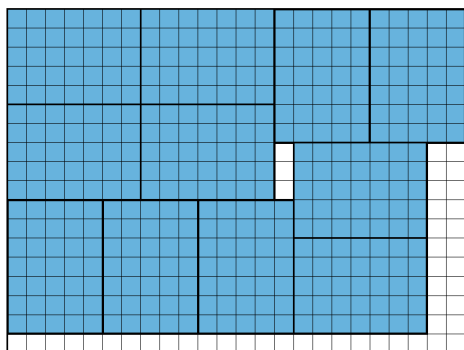


Quand des élèves auront trouvé des dispositions à 10 étiquettes, si la classe semble se résigner à ce qu'il soit impossible de faire mieux, l'enseignante peut attirer l'attention sur le nombre de carreaux non utilisé : quand 10 étiquettes sont placées, il reste 58 carreaux vides... soit plus que le nombre de carreaux d'une étiquette. Serait-il possible de placer ces étiquettes différemment pour que ces 58 carreaux permettent d'en dessiner une de plus ?



Quand une disposition à 11 étiquettes aura été trouvée, l'enseignante aidera la classe à prouver qu'il n'est pas possible de faire mieux (il est rare dans les problèmes que nous proposons d'atteindre l'optimum et de pouvoir fournir une preuve accessible au cycle 3 que c'est bien l'optimum... quand c'est le cas, profitons-en).

Elle proposera ensuite le même problème sur une grille de 24 x 18.



Il est facile de reproduire sur cette nouvelle grille la disposition de 11 étiquettes déjà utilisée pour la grille 24 x 17. On peut donc placer 11 étiquettes dans la nouvelle grille, mais peut-on en placer plus ?

### Éléments de preuve

#### Sur une grille 24x17.

Si les élèves ont réussi à placer 11 étiquettes, par exemple comme ci-dessous, il ne reste plus que 23 carreaux non occupés. Si on déplace les étiquettes, la disposition de ces 23 carreaux changera, mais il n'y en aura toujours que 23... pas assez pour dessiner une étiquette de plus.

Le problème est donc complètement résolu : on sait placer 11 étiquettes et on sait qu'il n'est pas possible d'en placer plus.

#### Sur une grille 24x18.

Si on a placé 11 étiquettes, on a utilisé 385 carreaux, il en reste 47. 47 carreaux c'est plus que ce qu'il faut pour une étiquette, mais ce n'est pas assez pour deux : peut-être réussira-t-on à placer une étiquette de plus pour atteindre 12 mais on ne pourra pas atteindre 13 étiquettes.

Il est aussi possible d'effectuer des calculs sans se référer aux exemples déjà dessinés :

$24 \times 18 = 432$  Il y a en tout 432 carreaux sur la grille.

$5 \times 7 = 35$  ;  $35 \times 12 = 420$  ;  $35 \times 13 = 455$

12 étiquettes recouvrent en tout 420 carreaux. 13 étiquettes en occupent 455.

Que peut-on en conclure ? Pour aider à interpréter correctement les résultats, l'enseignante écrit ce qui suit au tableau :

Combien d'étiquettes peut-on placer sur la grille 24 x 18 ?

8 9 10 11 12 ~~13~~ ~~14~~

Elle entoure en vert les nombres correspondant à des résultats déjà obtenus : il est possible de placer 11 étiquettes puisque nous l'avons déjà fait... et pour moins de 11 il suffit d'en enlever, rien de plus facile.

On ne peut pas placer 13 étiquettes parce qu'il n'y a pas assez de carreaux sur la grille, l'enseignante barre le nombre 13 et les nombres supérieurs à 13 (si on ne peut pas placer 13 étiquettes, on ne peut pas en placer 14).

L'enseignante interroge les élèves : il n'y a plus que pour 12 étiquettes qu'on ne sait pas, qu'en pensez-vous ?

Certains élèves affirmeront probablement que, puisqu'il y a 432 carreaux dans la grille et qu'il en faut seulement 420 pour faire 12 étiquettes il est certainement possible de placer 12 étiquettes. L'enseignante montrera que ce n'est pas certain :

— Pensez-vous que sur une grille de 4000 carreaux on peut toujours placer 12 étiquettes ?

Si les élèves répondent que oui, l'enseignante propose alors la grille suivante :

**Longueur : 1000 carreaux.**  
**Largeur : 4 carreaux**



Cette grille contient 4000 carreaux, c'est plus de carreaux que 100 étiquettes, pourtant on ne peut pas y placer une seule étiquette. Le nombre de carreaux est important, mais la forme de la grille aussi.

Pour être certain qu'on peut placer 12 étiquettes, il n'y a qu'une méthode : il faut le faire.

L'enseignante conclut la recherche collective sur ce problème en rappelant ce qui est su :

On sait placer 11 étiquettes.

On sait que personne ne pourra jamais placer 13 étiquettes, c'est impossible.

Pour 12 étiquettes on ne sait pas si c'est possible, l'enseignante place ce problème dans le classeur de recherches pour que les élèves qui le souhaitent puissent continuer à chercher.

Le problème sera terminé :

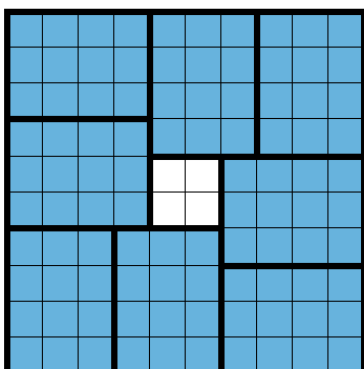
- si quelqu'un réussit à placer 12 étiquettes
- ou si quelqu'un explique pourquoi personne ne pourra jamais placer 12 étiquettes, même pas un mathématicien professionnel.

## Aménagements pour le cycle 2

Poser le même problème avec des étiquettes 4 x 3 sur une grille 10 x 10.

Comme au cycle 3, on encouragera les élèves à chercher en dessinant à main levée, mais on leur demandera ensuite de faire une version propre de leur meilleur résultat.

Il est possible de placer 8 étiquettes 4 x 3 sur la grille 10 x 10 comme le montre la figure suivante.



Si aucun élève ne parvient à placer 8 étiquettes pendant la recherche collective, le problème reste ouvert et une fiche est placée dans le classeur de recherches de la classe.

Si des élèves parviennent à placer 8 étiquettes, l'enseignante fait remarquer qu'il n'y a plus que 4 cases libres. Il est inutile d'essayer de placer 9 étiquettes.

Le problème peut alors être repris avec des étiquettes  $7 \times 5$  comme en cycle 3, en se limitant à la grille  $17 \times 24$ . Si des élèves parviennent à placer 11 étiquettes, il ne reste alors que 23 carreaux disponibles, pas assez pour dessiner une douzième étiquette. On peut donc envisager en CE2 que le problème soit entièrement clos : on sait placer 11 étiquettes et on sait qu'il est impossible d'en placer 12.

### Prolongements pour le cycle 4

- Chercher la preuve qu'il est impossible de placer 12 étiquettes sur la grille  $24 \times 18$  (cf partie compléments)
- Rechercher quelles sont les grilles qui peuvent être recouvertes entièrement par des étiquettes  $7 \times 5$

Les élèves penseront probablement assez vite aux grilles dont l'une des dimensions est multiple de 5 et l'autre multiple de 7 qui peuvent évidemment être recouvertes avec des étiquettes placées toutes dans le même sens.

- Y a-t-il des grilles dont l'une des dimensions n'est multiple ni de 5 ni de 7 et qui peuvent être entièrement recouvertes ?

La décomposition en facteurs premiers de l'aire de la grille permet de conclure que l'autre dimension doit être multiple de 35.

- On peut alors se demander si toutes les grilles dont une dimension est 35 peuvent être recouvertes.

La réponse est non puisque la grille de dimensions 35 et 2 ne peut pas être recouverte...

- Quelles sont alors les grilles  $35 \times n$  qui le peuvent ?

### Compléments

**Pourquoi on ne peut pas dessiner 12 étiquettes sur une grille  $24 \times 18$ .** Plaçons la grille en position horizontale, et colorions les étiquettes en bleu.

Observons une colonne de 18 cases de la grille. Le nombre de cases bleues de cette colonne est la somme de termes égaux à 5 ou à 7 (selon la position des étiquettes qu'elle traverse).

6

Or 18 ne peut pas être obtenu comme somme de termes égaux à 5 ou à 7 .

En effet, avec 2 termes le maximum possible est  $7 + 7 = 14$ , avec 4 termes le minimum est  $5+5+5+5=20$  il faudrait donc trois termes or ni  $5+5+5$  ni  $5+5+7$  ni  $5+7+7$  ni  $7+7+7$  ne conviennent.

Il en résulte que dans chacune des 24 colonnes il y a au moins une case qui n'est pas occupée par une étiquette. le nombre de cases pouvant être occupées n'est donc pas de  $24 \times 18$  mais de  $24 \times 18 - 24$  soit 408. Or  $35 \times 12 = 420$ , il n'est donc pas possible de placer 12 étiquettes.