Problèmes de dénombrement

Pourquoi travailler des problèmes de dénombrement en préparant le CRPE alors qu'il y en a rarement au concours ?

Parce qu'ils sont très formateurs : généralement, on ne dispose pas d'une méthode toute faite pour résoudre le problème, il faut prendre des initiatives, s'organiser, et surtout expliciter les choix que l'on fait...

Tout ceci est fort utile pour résoudre d'autres problèmes, mais également pour enseigner les mathématiques à l'école élémentaire et justifierait une place plus importante des problèmes de dénombrement au concours de recrutement.

Problème 1

On veut fabriquer un drapeau constitué de 4 bandes horizontales superposées, toutes de même largeur, chacune des 4 bandes étant jaune, rouge ou verte.

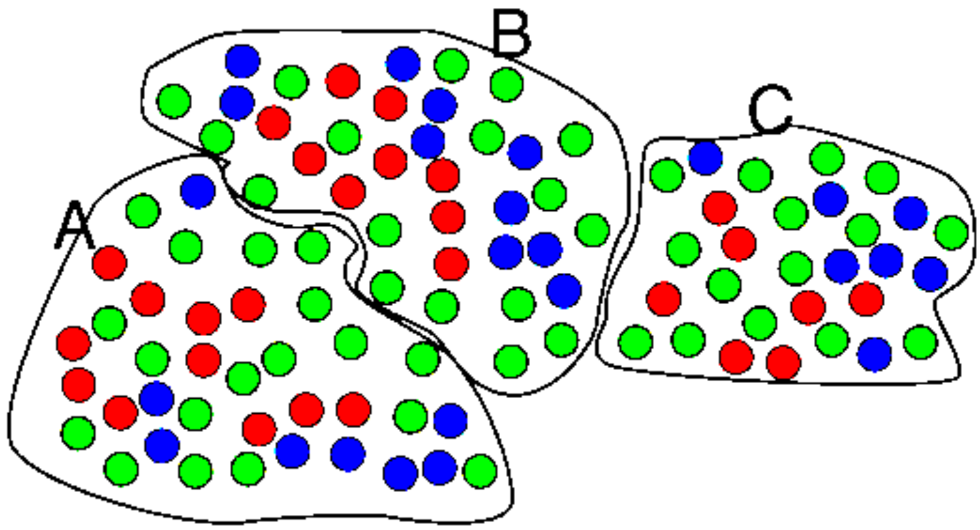
Il n'est pas possible que deux bandes adjacentes soient de la même couleur.

Deux exemples de drapeaux acceptables sont fournis.

Combien existe-t-il de drapeaux différents répondant à ces critères ?

Une idée de base : la partition.

Pour dénombrer les points de couleur du dessin qui suit, il serait risqué de les compter un à un sans ordre particulier.



Il est plus prudent de procéder d'une des manières suivantes :

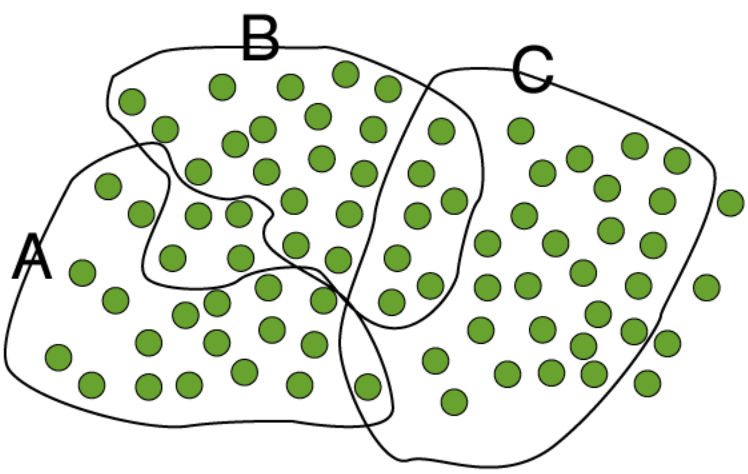
- Compter les points de chaque couleur puis additionner les trois résultats.
- Compter les points dans les formes A, B et C et additionner les trois résultats.

Chacune de ces façons de procéder s'appuie sur une **partition** de l'ensemble des points dessinés, c'est-à-dire un partage en plusieurs catégories de telle façon que chaque point appartienne à une catégorie et une seule.

Chaque point de l'ensemble est en effet d'une des trois couleurs, et d'une seule.

Chaque point est également à l'intérieur d'une seule des trois formes

Expliciter la partition utilisée est souvent l'étape cruciale d'un problème de dénombrement... et l'erreur la plus souvent commise consiste à répartir les objets à dénombrer dans des catégories qui ne constituent pas une partition.



Dénombrer les points verts des ensembles A, B et C du dessin précédents n'aide pas à trouver le nombre total de points verts, car A, B et C ne constituent pas une partition. Certains points font partie de deux ensembles, d'autres d'aucun ensemble.

Ce qui parait évident dans ce cas l'est beaucoup moins quand on ne dénombre plus des points dessinés sur une feuille ni des objets matériels, mais des êtres mathématiques plus fugaces.

Application de l'idée de partition au problème des drapeaux

Voici quelques partitions de l'ensemble de drapeaux qu'on veut dénombrer :

- Les drapeaux sans bande jaune / avec une bande jaune / avec deux bandes jaunes
- Les drapeaux qui utilisent deux couleurs / ceux qui utilisent trois couleurs
- Les drapeaux dont la bande du haut est jaune / verte / rouge
- Les drapeaux dont la bande du bas et celle du haut sont de la même couleur / ceux dont la bande du bas et du haut ne sont pas de la même couleur.

Il s'agit bien à chaque fois d'une partition, mais certaines partitions sont plus pratiques que d'autres. Nous allons poursuivre seulement la deuxième et la troisième des idées ci-dessus.

Première méthode : dénombrons les drapeaux bicolores puis les drapeaux tricolores
On peut subdiviser la catégorie bicolore en trois sous-catégories selon qu'on utilise le jaune et le vert, le vert et le rouge, ou bien le jaune et le rouge (le partage d'une catégorie en sous-catégories doit se faire avec la même attention que le partage initial : s'agit-il bien d'une partition de la catégorie ?).

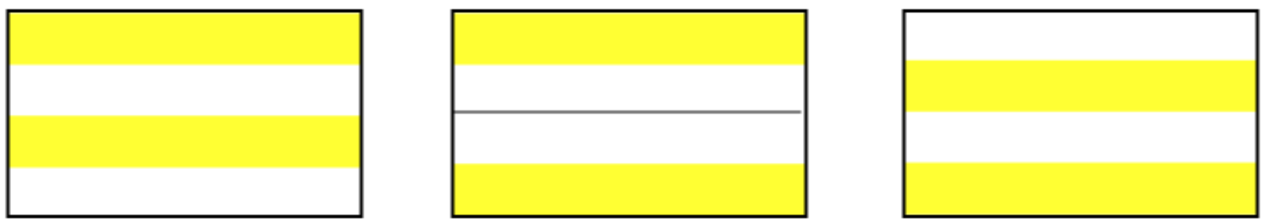
Comme deux bandes qui se touchent ne peuvent pas être de la même couleur, les seuls drapeaux jaune et vert possibles sont :

Il y a également deux drapeaux utilisant le rouge et le vert et deux utilisant le rouge et le jaune, soit 6 drapeaux bicolores en tout.

Sur les drapeaux tricolores, l'une des trois couleurs est présente sur deux bandes. Cette remarque fournit une sous-partition des drapeaux tricolores : ceux qui ont deux bandes jaunes, ceux qui ont deux bandes rouges et ceux qui ont deux bandes vertes.

Détaillons la catégorie des drapeaux tricolores ayant deux bandes jaunes.

Pour que les deux bandes jaunes ne se touchent pas, elles peuvent être disposées de trois façons, conformément aux schémas ci-dessus.



Pour chacune de ces trois dispositions, les bandes restantes peuvent être remplies soit avec le vert en haut soit avec le rouge en haut.

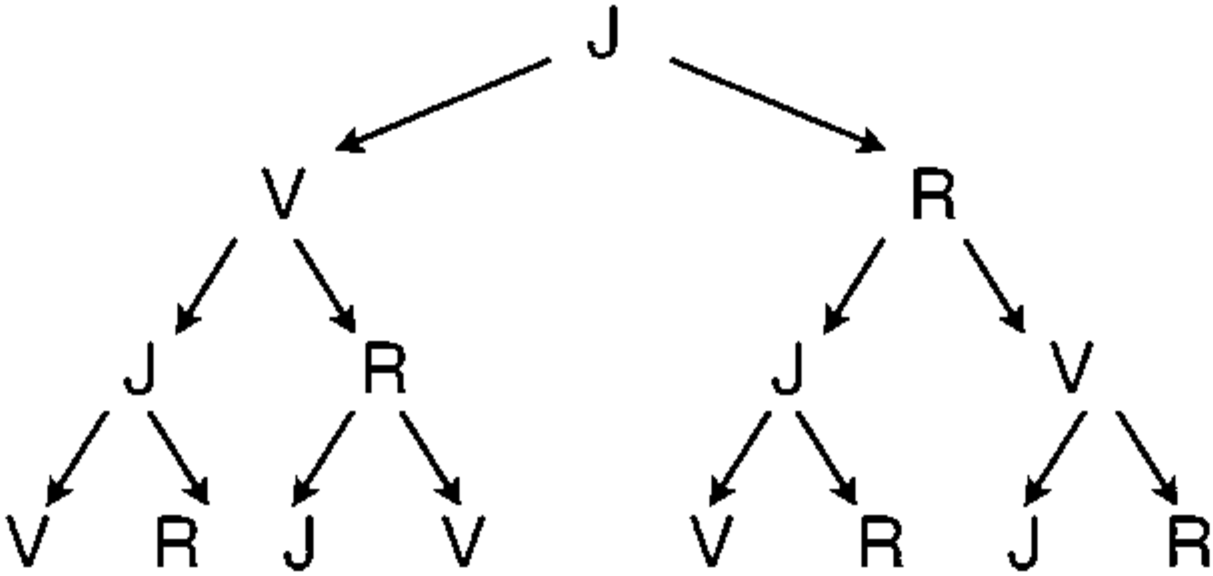
Il y a donc 6 drapeaux tricolores ayant deux bandes jaunes.
Il y a également 6 drapeaux tricolores ayant deux bandes vertes et 6 ayant deux bandes rouges soit 18 drapeaux tricolores.

Le nombre total de drapeaux possibles est donc 24 : 18 tricolores et 6 bicolores.

Deuxième méthode : dénombrons les drapeaux tricolores ayant la bande supérieure jaune. La deuxième bande en partant du haut peut être choisie de deux façons (rouge ou verte).

Pour chacune de ces deux possibilités, la troisième bande peut être choisie de deux façons (chacune des deux couleurs non utilisées à l'étape précédente).

La quatrième bande peut enfin être choisie de deux façons également (chacune des deux couleurs non utilisées pour la troisième bande).
Ces choix successifs peuvent être représentés par l'arbre suivant :



Cet arbre montre qu'il y a 8 drapeaux différents dont la bande supérieure est jaune. Comme il y a également 8 drapeaux dont la bande supérieure est rouge et 8 dont la bande supérieure est verte, il y a en tout 3 x 8 = 24 drapeaux possibles.

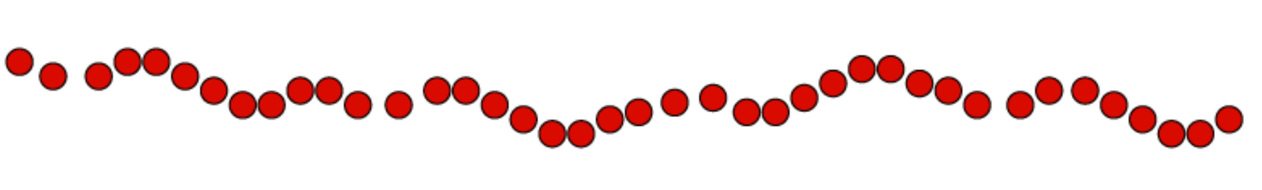
Remarque : quand on trouve une arborescence régulière comme celle-ci, c'est bien pratique pour dénombrer, en particulier si on doit généraliser : on voit bien que si le drapeau avait une cinquième bande, il y aurait deux façons de la choisir ce qui doublerait le nombre de drapeaux.

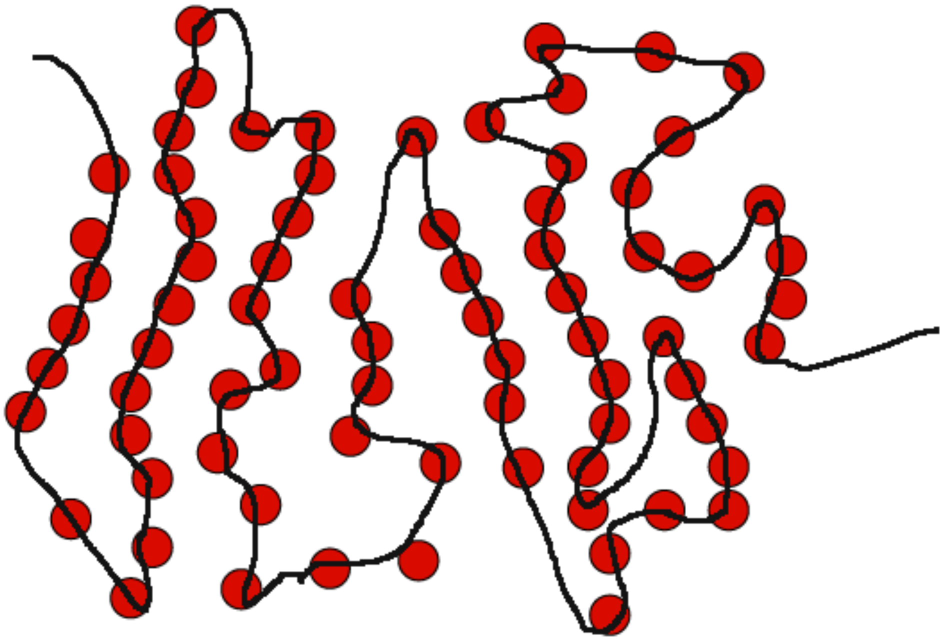
Cependant la découverte d'une telle arborescence régulière n'est ni indispensable (cf première méthode) ni toujours possible.

Une façon de se dispenser d'expliciter une partition.

Revenons au décompte des points sur une feuille.

Si les points sont organisés comme ceci le dénombrement ne pose pas de problème particulier, on ne risque guère en suivant une ligne d'oublier un point ou de compter plusieurs fois le même point.





Pour dénombrer une collection de points placés sur une feuille, on peut tracer une ligne passant une seule fois par chaque point. Cette ligne impose un ordre de comptage qui évite les erreurs (double comptage ou oubli).

Mais comment placer dans un ordre facile à repérer des objets mathématiques ?

Une solution consiste à nommer les objets en utilisant des chiffres ou des lettres. On utilise ensuite l'ordre numérique ou l'ordre alphabétique pour dénombrer sans oubli ni double comptage les noms des objets à la place des objets eux-mêmes.

Application de cette méthode au problème des drapeaux :
Nommons chaque drapeau par 4 lettres (l'initiale de chaque couleur en partant du haut).

Nous ne tenons pas compte pour l'instant de la contrainte sur les couleurs voisines, ainsi nous allons trouver des drapeaux non autorisés que nous supprimerons par la suite.

Nous allons donc écrire tous les "mots" de 4 lettres que l'on peut former avec J R et V.

JJJJ JJJR JJJV JJRJ JJRR JJRV JJVJ JJVR JJVV
JRJJ JRJR JRJV JRRJ JRRR JRRV JRVJ JRVR JRVV JVJJ JVJR JVJV JVRJ JVRR JVRV JVVJ JVVR JVVV

RJJJ RJJR RJJV RJRJ RJRR RJRV RJVJ RJVR RJVV RRJJ RRJR RRJV RRRJ RRRR RRRV RRVJ RRVR RRVV RVJJ RVJR RVJV RVRJ RVRR RVRV RVVJ RVVR RVVV

VJJJ VJJR VJJV VJRJ VJRR VJRV VJVJ VJVR VJVV VRJJ VRJR VRJV VRRJ VRRR VRRV VRVJ VRVR VRVV VVJJ VVJR VVJV VVRJ VVRR VVRV VVVJ VVVR VVVV

Parmi ces 81 "mots" écrits dans l'ordre alphabétique, quels sont ceux qui correspondent à des drapeaux valides ?

Dire qu'il ne faut pas que deux bandes de même couleur se touchent revient à dire qu'il ne faut pas que deux lettres identiques se suivent.

Seuls les "mots" en rouge dans la liste suivante correspondent donc à des drapeaux valides : il y en a 24.

JJJJ JJJR JJJV JJRJ JJRR JJRV JJVJ JJVR JJVV
JRJJ JRJR JRJV JRRJ JRRR JRRV JRVJ JRVR JRVV JVJJ JVJR JVJV JVRJ JVRR JVRV JVVJ JVVR JVVV

RJJJ RJJR RJJV RJRJ RJRR RJRV RJVJ RJVR RJVV RRJJ RRJR RRJV RRRJ RRRR RRRV RRVJ RRVR RRVV RVJJ RVJR RVJV RVRJ RVRR RVRV RVVJ RVVR RVVV

VJJJ VJJR VJJV VJRJ VJRR VJRV VJVJ VJVR VJVV
VRJJ VRJR VRJV VRRJ VRRR VRRV VRVJ VRVR VRVV VVJJ VVJR VVJV VVRJ VVRR VVRV VVVJ VVVR VVVV

Pour ce problème, cette méthode n'est pas particulièrement avantageuse... encore que rien ne nous oblige à être bornés : on peut fort bien commencer la liste et remarquer qu'il y aura autant de drapeaux avec la bande supérieure jaune (c'est-à-dire de mots commençant par j) qu'avec la bande supérieure rouge ou verte. Le nombre de mots à écrire est alors beaucoup plus raisonnable... mais on a réintroduit l'idée de partition.

Problèmes voisins

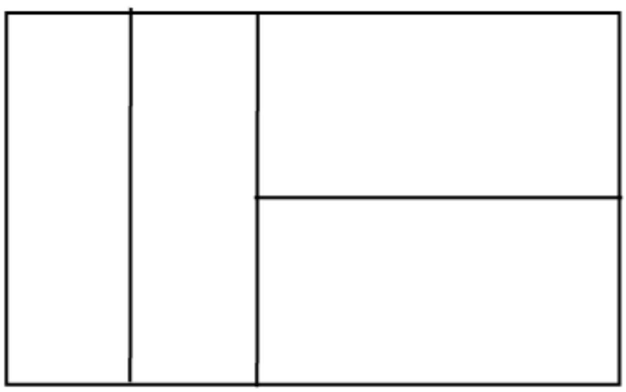
Si vous avez compris les diverses solutions de ce problème, vous devriez pouvoir résoudre les problèmes suivants :

Combien peut-on former de drapeaux s'il y a toujours 4 bandes, mais avec 4 couleurs ?

Combien peut-on former de drapeaux s'il y a toujours 3 couleurs, mais 5 bandes ?

Combien peut-on former de drapeaux s'il y a toujours 3 couleurs et si les zones sont disposées ainsi :

Combien peut-on former de drapeaux s'il y a toujours 3 couleurs et si les zones sont disposées ainsi :



Solutions

Remarque préalable : si une seule solution est fournie, cela ne signifie pas qu'il n'en existe pas d'autre, seulement que l'auteur n'avait pas le courage d'en rédiger d'autres.

Combien peut-on former de drapeaux s'il y a 4 bandes et 4 couleurs ?

Colorions le drapeau en partant du bas.

On peut choisir 4 couleurs pour la première bande puis 3 couleurs pour la deuxième bande (toutes, sauf celle de la première bande).

Il y a donc 4 x 3 = 12 façons de colorier les deux premières bandes.

On peut choisir 3 couleurs pour la troisième bande (toutes sauf celle de la deuxième bande). Il y a donc 12 x 3 = 36 façons de colorier les trois premières bandes.

On peut choisir 3 couleurs pour la dernière bande (toutes sauf celle de la troisième bande). **Il y a donc 36 x 3 = 108 façons de colorier le drapeau.**

Combien peut-on former de drapeaux s'il y a 5 bandes et 3 couleurs ?

La même méthode que pour le problème précédent conduit à dire que **le nombre de drapeaux différents est alors égal à 3 x 2 x 2 x 2 x 2 = 48.**

Combien peut-on former de drapeaux s'il y a 3 couleurs et si les zones sont disposées ainsi :

1	2
3	4

Les drapeaux réalisables peuvent être bicolores ou tricolores.

Dénombrons les drapeaux bicolores.

Ils peuvent être soit jaune et vert, soit jaune et rouge, soit vert et rouge. Pour chacune de ces associations, l'une des couleurs occupe les cases 1 et 4, l'autre les cases 2 et 3, il y a donc deux dispositions possibles.

Le nombre de drapeaux bicolores est donc 3 x 2 = 6

Dénombrons les drapeaux tricolores :

L'une des couleurs est présente dans deux cases qui peuvent être 1 et 4 ou 2 et 3

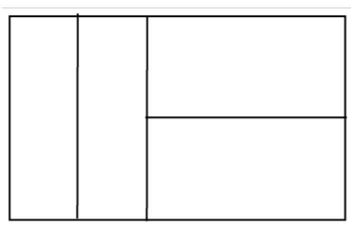
Pour chacune de ces dispositions, il y a deux façons de placer les deux couleurs restantes. Par exemple si les cases 1 et 4 sont jaunes, on peut décider que 2 est vert et 3 rouge ou bien que 2 est rouge et 3vert.

Il y a donc 4 drapeaux tricolores avec deux cases jaunes et également 4 avec 2 cases rouges et 4 avec deux cases vertes

Le nombre de drapeaux tricolores est donc 3 x 4 = 12

Le nombre total de drapeaux est 12 + 6 =18.

Combien peut-on former de drapeaux s'il y a toujours 3 couleurs et si les zones sont disposées ainsi :



Remplissons le drapeau à partir de la gauche.

Il y a trois façons de choisir la couleur de la première bande verticale.
Pour chacun des choix précédents, il y a deux façons de choisir la deuxième bande verticale. Les couleurs des deux bandes horizontales sont alors imposées : on doit utiliser les deux couleurs non utilisées à l'étape précédente. On peut seulement choisir quelle couleur on place en haut (deux possibilités)

Le nombre de drapeaux est donc 3 x 2 **x** 2 = 12.