Chapitre 11

Nombres entiers

Les nombres entiers dont il est question ici sont essentiellement les nombres entiers dits « naturels », c'est-à-dire positifs ou nuls.

Les entiers relatifs (c'est-à-dire tous les entiers y compris ceux qui sont négatifs) sont au programme du collège, mais ils sont rarement utilisés au concours, sans doute parce qu'ils ne sont pas au programme de l'école élémentaire. Nous considérons donc qu'ils ne constituent pas une priorité.

Multiples et diviseurs

Les multiples de 5 sont les nombres qui figurent dans la table de multiplication par 5.
Il s'agit donc de 0 ; 5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 ; … ; 255 ; …

De même, les multiples de 3 sont 0 ; 3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 15 ; … ; 306 ; …

On exprime cette idée de façon plus formelle par la définition suivante :

Un entier A est multiple d'un entier B s'il existe un entier k tel que $A = k \times B$.

Les phrases « *A est multiple de B* » et « *B est diviseur de A* » et « *A est divisible par B* », signifient la même chose. On peut dire indifféremment que 50 est multiple de 10 ou que 10 est diviseur de 50 ou que 50 est divisible par 10.

Remarque : l'expression « est divisible » signifie beaucoup plus que « on peut effectuer la division ». On peut effectuer la division de 35 par 10, pourtant 35 n'est pas divisible par 10. Pour exprimer correctement le sens de l'expression « est divisible » en référence à la division posée, il faudrait dire : « A est divisible par B si la division euclidienne de A par B a pour reste 0 ».

Nombres premiers

Il est parfois utile d'écrire le nombre 12 sous la forme $2 \times 2 \times 3$, ou 90 sous la forme $2 \times 3 \times 3 \times 5$.

Cela s'appelle la décomposition en facteurs premiers de 12 ou de 90. Il s'agit d'écrire un nombre entier sous la forme d'un produit d'entiers aussi petits que possible.
On exclut toutefois l'utilisation du nombre 1, sans quoi on s'exposerait à des décompositions sans intérêt telles que $15 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 3 \times 5$.

Les nombres qui interviennent dans ces décompositions sont ceux que l'on ne peut pas décomposer, on les appelle les nombres premiers. C'est cette idée que traduit la définition suivante :

On dit qu'un nombre entier est premier s'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Cette définition a été choisie afin d'exclure le nombre 1 de la famille des nombres premiers.
Cela permet de ne pas rencontrer de décomposition en facteurs premiers ressemblant à l'exemple que nous avons donné pour 15. L'exclusion du nombre 1 des nombres premiers rend ainsi vraie la propriété suivante (que nous admettrons) :

Tout nombre entier supérieur à 1 possède une seule décomposition en facteurs premiers.

Si 1 était considéré comme premier, $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 3 \times 5$; $1 \times 1 \times 3 \times 5$ et 3×5 seraient trois décompositions en facteurs premiers différentes et parfaitement correctes de 15. Le nombre 1 n'étant pas premier, la seule décomposition de 15 en facteurs premiers est 3×5 (que l'on peut évidemment écrire 5×3, mais il s'agit toujours du produit des mêmes nombres).

Cette propriété a une conséquence pratique : puisqu'il n'y a qu'une décomposition, toute démarche aboutissant à une décomposition en facteurs premiers est correcte. Il convient donc de choisir la plus simple. Pour décomposer en facteurs premiers le nombre 210 000, il n'est donc pas judicieux de diviser par 2 puis à nouveau par 2... on procédera plutôt ainsi :

$210000 = 3 \times 7 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$

$210000 = 3 \times 7 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$

$210000 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7$

$210000 = 2^4 \times 3 \times 5^4 \times 7$

Les deux dernières étapes ne sont pas indispensables, mais ranger les facteurs par ordre croissant permet de s'y retrouver plus facilement et utiliser la notation 2^4 de préférence à $2 \times 2 \times 2 \times 2$ permet une écriture plus courte.

C'est seulement s'il faut décomposer en facteurs premiers un nombre comme 1413258, pour lequel aucune décomposition n'est évidente qu'on envisagera de tester dans l'ordre les petits nombres premiers (2 ; 3 ; 5 ; 7 : 11 ; 13...) pour voir si ce sont des diviseurs de 1413258. Avoir à décomposer un tel nombre est peu probable au concours.

Recherche de tous les diviseurs d'un entier

Pour rechercher tous les diviseurs de 200, on pourrait tester un à un tous les entiers de 1 à 200. Cette méthode est simple à comprendre, mais particulièrement fastidieuse.

Une petite amélioration la rend plus efficace. Supposons que nous en soyons à chercher si 8 est un diviseur de 200. En posant la division de 200 par 8, on trouve que $200 = 8 \times 25$, on a donc obtenu non pas un diviseur de 200, mais deux à la fois : 8 et 25. En procédant ainsi, on construit la liste des diviseurs à la fois à partir du plus petit, 1, et du plus grand, 200.

On obtient successivement : 1 et 200 ; 2 et 100 ; 4 et 50 ; 5 et 40 ; 8 et 25 ; 10 et 20.

La recherche est encore facilitée en décomposant 200 en facteurs premiers : $200 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$.

Il suffit alors de regarder la décomposition pour voir que 3 ou 7 ne sont pas des diviseurs de 200 et passer au nombre suivant.

D'autre part, quand nous en sommes à 8, c'est-à-dire $2 \times 2 \times 2$, un coup d'oeil à la décomposition permet de voir immédiatement le diviseur 25, associé à 8.

Recherche du nombre de diviseurs d'un entier

Combien le nombre 300 a-t-il de diviseurs ?

Une première méthode consiste à écrire tous les diviseurs de 300 comme on vient de le voir pour 200, puis à les compter.

Les diviseurs de 300 sont :

1 et 300,

2 ; et 150,

3 et 100,

4 et 75,

5 ; et 60

6 et 50

10 et 30

12 et 25

15 et 20.

Le nombre 300 possède 18 diviseurs.

Cette méthode reste acceptable bien qu'un peu fastidieuse pour 300, elle ne le serait pas pour 400 000, c'est pourquoi nous en proposons une autre.

Décomposons 300 en facteurs premiers : $300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$.

Un diviseur de 300 est constitué d'une « partie » de cette décomposition en facteurs premiers, par exemple $2 \times 3 \times 5$ ou 2×5 ou 5×5 sont des diviseurs de 300.

Pour former un diviseur de 300 de cette façon, on doit prendre trois décisions :

1. Choisir combien de facteurs 2 on prend dans la partie de la décomposition qui fournira le diviseur. Comme il y a trois facteurs deux, nous avons trois possibilités : en prendre un, prendre les deux, ou bien ne pas en prendre du tout, cas à ne pas oublier.

2. Quel que soit le choix effectué à l'étape précédente, nous devons choisir le nombre de facteurs 3 que nous allons conserver. Il y a deux possibilités, en garder un ou pas du tout, pour chacun des trois choix possibles de l'étape précédente, ce qui nous amène à six choix différents.

3. Quels que soient les choix précédents, nous devons choisir entre conserver aucun, un ou deux facteurs 5, ce qui multiplie encore par trois le nombre total d'options. On peut donc fabriquer ainsi 18 diviseurs différents au nombre 300.

Remarque : le choix extrême consistant à ne garder aucun facteur 2, aucun facteur 3 et aucun facteur 5 n'est pas à exclure, il correspond bien à un diviseur de 300, le nombre 1.

En représentant ce raisonnement par une arborescence ou un tableau on obtient une autre façon de trouver tous les diviseurs de 300.

nombre de facteurs 2	nombre de facteurs 3	nombre de facteurs 5	Diviseur de 300 obtenu
aucun	aucun	aucun	1
		un	5
		deux	25
	un	aucun	3
		un	15
		deux	75
un	aucun	aucun	2
		un	10
		deux	50
	un	aucun	6
		un	30
		deux	150
deux	aucun	aucun	4
		un	20
		deux	100
	un	aucun	12
		un	60
		deux	300

Diviseurs communs, multiples communs

Un diviseur commun à 60 et 80 est un nombre qui est à la fois diviseur de 60 et diviseur de 80 :

- — 10 est un diviseur commun à 60 et 80 parce que $60 = 10 \times 6$ et $80 = 10 \times 8$,
- — 4 est un diviseur commun à 60 et 80 parce que $60 = 4 \times 15$ et $80 = 4 \times 20$.

Deux nombres entiers ont toujours au moins un diviseur commun : le nombre 1, puisqu'il est diviseur de tous les entiers.

Un multiple commun à 60 et 80 est un nombre qui est à la fois multiple de 60 et multiple de 80 :

- — 1200 est un multiple commun à 60 et à 80 parce que $1200 = 60 \times 20$ et $1200 = 80 \times 15$
- — 4800 est un multiple commun à 60 et à 80 parce que $4800 = 60 \times 80 \ldots$ ce qui fournit au besoin une façon simple de trouver un multiple commun à deux entiers peu sympathiques comme 31271 et 709363, il suffit de les multiplier entre eux.

Deux nombres entiers ont toujours une infinité de multiples communs, parmi lesquels leur produit et tous les multiples de leur produit.

Plus grand diviseur commun à deux entiers

La recherche du plus grand diviseur commun à deux entiers (souvent noté PGDC ou PGCD) est une question classique.

Trois méthodes principales peuvent être employées :

- — Faire la liste de tous les diviseurs d'un seul des deux nombres et chercher dans cette liste, par ordre décroissant, un diviseur de l'autre nombre.
- — Faire la liste de tous les diviseurs de chacun des deux nombres et chercher quel est le plus grand nombre présent dans les deux listes.
- — S'appuyer sur la décomposition en facteurs premiers des deux nombres.

Les deux premières méthodes s'appuient sur une recherche de tous les diviseurs. Un procédé permettant que cette recherche soit d'une longueur raisonnable est exposé plus haut. Ces méthodes ne sont cependant utilisables que dans des cas assez simples où il n'y a pas un trop grand nombre de diviseurs

Il existe également une méthode basée sur une succession de divisions euclidiennes, que vous avez peut-être apprise au collège. Nous vous la déconseillons, d'une part parce qu'il est difficile de comprendre pourquoi elle fournit le résultat attendu, d'autre part parce qu'elle ne permet pas, contrairement aux autres méthodes, de déterminer le plus grand diviseur commun à trois entiers. N'utilisez donc la méthode par division que si vous en avez un souvenir précis et fiable.

Exemple : recherche du plus grand diviseur commun à 210 et 175.

Première méthode :

Cherchons tous les diviseurs de 175 : ce sont 1 ; 5 ; 7 ; 25 ; 35 et 175. Parmi ces nombres, 175 n'est pas diviseur de 210, mais 35 l'est puisque $35 \times 6 = 210$.

35 est donc le PGDC à 210 et 175.

Deuxième méthode :

Cherchons tous les diviseurs de 175 et de 210.

Les diviseurs de 175 sont : 1 ; 5 ; 7 ; 25 ; 35 et 175.

Les diviseurs de 210 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 10 ; 14 ; 15 ; 21 ; 30 ; 35 ; 42 ; 70 ; 105 ; 210.

Nous constatons que le plus grand nombre figurant dans les deux listes est 35.

35 est donc le PGDC de 210 et 175.

Troisième méthode :

Décomposons les nombres 175 et 210 en facteurs premiers. $175 = 5 \times 5 \times 7$; $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

Un diviseur de 175 est en général une « partie » de sa décomposition en facteurs premiers, par exemple 7 ou 5×5 ou $5 \times 5 \times 7$.

Un diviseur de 210 est en général une « partie » de sa décomposition en facteurs premiers, par exemple 2×3 ou 2×7 ou $3 \times 5 \times 7$.

Il s'agit donc de trouver la plus grande partie possible qui se trouve à la fois dans la décomposition de 175 et de 210. Il s'agit de 5×7, c'est-à-dire de 35, qui est donc le PGDC de 210 et 175.

Remarque : dans le cas où il n'y a aucune partie commune dans les deux décompositions, il faut se souvenir que le nombre 1 est un diviseur de n'importe quel entier, qui ne figure pas dans les décompositions en facteurs premiers. En l'absence d'autre diviseur commun, le PGDC de deux nombres est 1. On dit alors que les deux nombres sont premiers entre eux.
Par exemple, 21 et 10 sont premiers entre eux (mais ni 21 ni 10 ne sont premiers).

Plus petit multiple commun à deux entiers

Chercher le plus petit multiple commun à deux entiers (PPMC ou PPCM) est également classique.

Remarque : 0 étant un multiple de tout nombre entier, au sens strict le plus petit multiple commun à deux entiers est toujours 0… ce qui n'a pas un grand intérêt. Il faudrait donc dire qu'on cherche le plus petit multiple commun non nul *à deux entiers.*
Cependant, l'usage établi est de ne pas préciser « non nul ».

Deux méthodes principales sont utilisables :

- — Écrire le début de la liste des multiples de chacun des deux entiers, jusqu'à trouver un nombre figurant dans les deux listes. Plus encore que pour le PGDC, cette méthode est limitée aux cas simples puisque la liste des multiples d'un nombre est infinie.
- — S'appuyer sur la décomposition en facteurs premiers des deux nombres.

Exemple : recherche du plus petit multiple commun à 210 et 175.

Première méthode :

Les premiers multiples non nuls de 210 sont : 210 ; 420 ; 630 ; 840 ; 1050 ; 1260 ; 1470 ; 1680

Les premiers multiples non nuls de 175 sont : 175 ; 350 ; 525 ; 700 ; 875 ; 1050

Nous constatons que le plus petit nombre à figurer dans les deux listes est 1050.

1050 est donc le PPMC de 210 et 175.

Deuxième méthode :

Décomposons les nombres 175 et 210 en facteurs premiers : $175 = 5\times5\times7$; $210 = 2\times3\times5\times7$

Un multiple de 210 s'écrit $210\times$k, c'est-à-dire $2\times3\times5\times7\times$ k, le nombre k étant entier.
Si le multiple de 210 est décomposé, $2\times3\times5\times7$, c'est-à-dire 210, figure dans la décomposition.
Il en est de même d'un multiple de 175. $5\times5\times7$ figure dans sa décomposition.

Pour trouver un multiple commun à 175 et 210, il suffit donc d'écrire une décomposition qui contienne $2\times3\times5\times7$ et qui contienne également $5\times5\times7$.
Par exemple, $2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7 \times 11$ est un multiple commun à 175 et 210, mais ce n'est pas le plus petit.

En effet, en supprimant le facteur 11, on obtient $2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$, c'est toujours un multiple commun à 175 et 210.

Quels facteurs peut-on encore supprimer ? On ne peut pas supprimer le facteur 2, en effet
$3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$, n'est pas un multiple de 210.

En raisonnant ainsi, on constate qu'il est possible de supprimer certains des facteurs 3, 5 et 7.

Parvenu à $2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$ on s'aperçoit que ce nombre est toujours un multiple commun à 175 et 210, mais que si on supprime n'importe lequel des facteurs, ce ne sera plus le cas. Le nombre $2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$ (c'est-à-dire 1050) est donc le plus petit multiple commun à 175 et 210.

Remarque : en pratique, presque tout se fait de tête. On écrit les décompositions en facteurs premiers des deux nombres puis on donne immédiatement leur PPMC sous forme décomposée.

Division euclidienne

Il s'agit de la bonne vieille division, la première que vous ayez apprise à l'école élémentaire, celle où l'on divise un nombre entier par un nombre entier, sans poursuivre au-delà de la virgule.

technique de la division euclidienne posée

Voici une des techniques possibles pour poser la division euclidienne de 5200 par 17.

Nous détaillons les raisonnements qui sous-tendent la technique, mais généralement ceux-ci ne sont pas écrits.

$10 \times 17 = 170$ est plus petit que 5200

$100 \times 17 = 1700$ est plus petit que 5200

$1000 \times 17 = 17000$ est plus grand que 5200

5200, c'est plus que 100 fois 17, mais moins que 1000 fois 17, le quotient cherché s'écrira donc avec trois chiffres.

5200, c'est plus que 100 fois 17, mais est-ce plus que 200 fois 17 ? Que 300 fois 17 ?

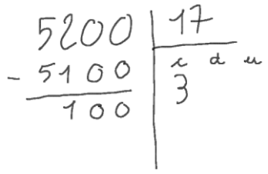
Pour répondre à cette question, il suffit d'élaborer mentalement la table de multiplication de 17.

$2 \times 17 = 34$, $3 \times 17 = 51$; $4 \times 17 = 68$

Alors, $200 \times 17 = 3400$; $300 \times 17 = 5100$; $400 \times 17 = 6800$.

Dans 5200, il y a donc 300 fois 17, mais pas 400 fois 17.

À ce stade, nous pouvons commencer à poser la division par écrit :



Écrites, les étapes précédentes paraissent longues, mais, en calcul mental, tout cela va très vite.

La méthode que nous avons choisie présente un certain nombre de caractéristiques :

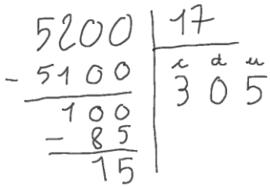
- *On travaille sur le nombre 5200 dans son ensemble (et non sur le nombre 52)*
- *La soustraction dans la partie gauche est posée. 5200 - 5100 pouvait se calculer de tête, mais la soustraction n'est pas toujours aussi simple, la poser limite le risque d'erreur. Par ailleurs, expliciter la soustraction rappelle le sens de ce qu'on cherche : avec 300 fois 17 on obtient 5100, il reste 100 pour atteindre 5200, nous allons maintenant chercher combien de fois 17 dans 100.*
- *le fait que l'on vient de prendre en compte 300 fois 17 (et non 3000 fois ou 30 fois) est explicité par les lettres c d et u : le chiffre 3 que l'on écrit est le chiffre des centaines.*

On recommence alors une phase de calcul mental analogue à la phase initiale, qui nous permet de déterminer que :

$10 \times 17 = 170$ est plus grand que 100 puis que :

$5 \times 17 = 85$ est plus petit que 100 ; $6 \times 17 = 102$ est plus grand que 100.

Nous pouvons alors terminer la division.



Remarque : la méthode présentée ici évite une erreur fréquente : le raisonnement montre qu'il reste à écrire 5 fois 7 (et non 50 ou 500. . .) le chiffre 5 doit donc être placé au rang des unités, ce qui oblige à écrire un zéro au rang des dizaines.

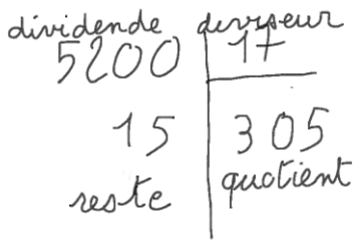
Écriture en ligne de la division euclidienne

L'opération posée nous a permis de déterminer que 5200 valait plus que 305×17, mais moins que 306×17. 5200 vaut exactement $305 \times 17 + 15$.

L'égalité $5200 = 305 \times 17 + 15$ traduit toutes les informations trouvées en posant la division.

Cette égalité permet une vérification très utile quand on vient de poser une division, nous verrons plus loin qu'elle permet également de résoudre de nombreux problèmes portant sur la division.

Il existe un nom qu'il est utile de connaître, pour désigner chacun des nombres intervenant dans une division euclidienne :



Une condition essentielle

L'écriture en ligne de la division précédente ne posait pas de problème parce que nous avons effectivement posé la division avant de la traduire par une écriture en ligne. Souvent, on travaillera directement à partir de l'écriture en ligne, il faudra alors être très vigilant.

$7500 = 286 \times 26 + 64$

$7500 = 287 \times 26 + 38$

$7500 = 288 \times 26 + 12$

Les trois égalités qui précèdent sont vraies, mais seule la dernière traduit la division euclidienne de 7500 par 26. En effet, 64 et 38 étant plus grands que 26, on peut considérer les égalités précédentes comme une étape dans le calcul de la division euclidienne, pas comme la division terminée.

Dans une division euclidienne, le reste est inférieur au diviseur.

Exemple d'exercice

Le reste de la division euclidienne du nombre entier A par 12 est égal à 10.

Quel est le reste de la division euclidienne du nombre 4A par 6 ?

Phase de recherche au brouillon

Quels sont les nombres qui ont pour reste 10 dans la division par 12 ? On peut en trouver quelques uns en tâtonnant, mais il est plus simple de partir de l'écriture en ligne de la division :

$7 \times 12 + 10$; $258 \times 12 + 10$; $43 \times 12 + 10$; $0 \times 12 + 10$ ont pour reste 10 dans la division par 12.

Le nombre A est dans cette famille, on traduit cela en écrivant :

$A = q \times 12 + 10$, q étant un nombre entier.

Le travail va alors consister à transformer cette égalité pour obtenir une autre égalité qui traduira non plus la division de A par 12, mais la division de 4A par 6.

Si on avait une idée du résultat cherché (le reste) avant même de se lancer dans ce travail, cela aiderait certainement, c'est pourquoi il est utile de faire quelques exemples au brouillon, à partir de valeurs simples que peut prendre A.

Si A valait $0 \times 12 + 10$, c'est-à-dire 10, 4A vaudraient 40, c'est-à-dire $6 \times 6 + 4$, le reste de la division de 4A par 6 serait 4.

Si A valait $1 \times 12 + 10$, c'est-à-dire 22, 4A vaudraient 88, c'est-à-dire $14 \times 6 + 4$, le reste de la division de 4A par 6 serait 4.

Si A valait $2 \times 12 + 10$, c'est-à-dire 34, 4A vaudraient 136, c'est-à-dire $22 \times 6 + 4$, le reste de la division de 4A par 6 serait 4.

Il semblerait bien que le reste de la division de 4A par 6 soit toujours 4. Trois exemples ne font pas une preuve, cependant cela peut guider notre travail, nous allons chercher à montrer que le reste de la division de 4A par 6 est bel et bien 4.

Notre but est alors d'obtenir une égalité qui ressemblerait à $4A = 6 \times (quelque\,chose) + 4$

Une première transformation s'impose puisqu'il doit être question de 4A, à partir de $A = 12q+10$, on peut écrire :

$4A = 48q + 40$

Cette égalité permettrait de répondre à la question « quel est le reste de la division de 4A par 48 ? » mais nous cherchons le reste de la division par 6, nous allons donc la transformer pour montrer « un certain nombre de fois 6 ».

$4A = (8q) \times 6 + 40$

Cette nouvelle égalité ressemble à la traduction d'une division par 6, il ne lui manque qu'un critère : dans une division par 6 le reste est plus petit que 6… 40 ne peut donc pas être le reste cherché. À ce stade, puisque nous avons une forte présomption que le reste est 4, nous allons faire en sorte de faire apparaître 4 dans l'égalité :

$4A = (8q) \times 6 + 36 + 4$

il ne reste qu'à remarquer que 36, c'est 6 fois 6 pour obtenir :

$4A = (8q) \times 6 + 6 \times 6 + 4$ puis

$4A = (8q + 6) \times 6 + 4$, écriture qui permet de conclure.

Solution rédigée

Le reste de la division euclidienne du nombre entier A par 12 est égal à 10 donc $A = 12q + 10$, *q étant un entier.*

A partir de cette égalité, on obtient successivement :

$4A = 48q + 40$

$4A = (8q) \times 6 + 40$

$4A = (8q) \times 6 + 36 + 4$

$4A = (8q) \times 6 + 6 \times 6 + 4$

$4A = (8q + 6) \times 6 + 4$

Cette dernière égalité montre que le reste de la division euclidienne de 4A par 6 est égal à 4.

numération en base dix et en bases autres que dix

Quelques rappels sur notre système de numération décimal

- Notre système usuel de numération est un système de position, ce qui signifie que la position des chiffres a une signification : 53 ne signifie pas la même chose que 35.
  Dans 53, on sait que le chiffre 5 désigne 5 paquets de dix, ou 5 dizaines, uniquement parce qu'il est placé au deuxième rang à partir de la droite.
- Notre système usuel de numération est décimal, il utilise des groupements par 10 (au deuxième rang en partant de la droite), puis par 10×10 (au troisième rang), par $10 \times 10 \times 10$, etc.
- Cette règle de position impose l'usage du chiffre 0. Dans 2054, le « 0 » sert essentiellement à indiquer que le chiffre 2 désigne 2 milliers puisqu'il est au quatrième rang en partant de la droite.
- Puisque, dès que nous avons dix objets ou dix groupes identiques, nous effectuons un nouveau regroupement, les chiffres de 0 à 9 suffisent pour écrire tous les nombres entiers.
- Tout nombre entier écrit en système décimal peut se décomposer en indiquant la valeur représentée par chacun de ses chiffres comme sur l'exemple suivant :
  $43205 = 40000 + 3000 + 200 + 5$
  $43205 = 4 \times 10000 + 3 \times 1000 + 2 \times 100 + 0 \times 10 + 5 \times 1$
  $43205 = 4 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 5 \times 10^0$
  Rien ne vous oblige à utiliser systématiquement la dernière version, d'interprétation plus difficile. Dans la plupart des cas, les deux premières formes de la décomposition suffisent à résoudre les problèmes que vous rencontrerez.
- La décomposition « chiffre par chiffre » est fondamentale, mais d'autres décompositions sont possibles. Certaines sont fortement suggérées par la façon de dire les nombres à l'oral : $43205 = 43 \times 1000 + 2 \times 100 + 5$ est conforme à « quarante-trois *mille* deux *cent* cinq ».
  D'autres ne s'appuient absolument pas sur l'oral, comme $43205 = 4 \times 10000 + 32 \times 100 + 5$ ou $43205 = 4320 \times 10 + 5$.
  Ces décompositions moins habituelles peuvent cependant être bien utiles.
- Voir 6342350 comme $63 \times 100000 + 42 \times 1000 + 35 \times 10$ permet par exemple de dire facilement que 6342350 est multiple de 7 puisque c'est la somme de multiples de 7 (63, 42 et 35 figurent dans la «table de 7» mémorisée).

Critères de divisibilités

Les propriétés qui suivent figurent dans cette rubrique parce que ce ne sont pas des propriétés des nombres eux-mêmes, mais des propriétés liées à leur écriture dans le système décimal.

Pour bien comprendre la différence, envisageons les deux propriétés suivantes :
- Propriété A : si un nombre est multiple de 10, alors il est multiple de 5.
- Propriété B : si un nombre se termine par le chiffre 0, alors il est pair.

La propriété A reste vraie quelle que soit la façon d'écrire les nombres. Si on applique cette propriété au nombre trente, il importe peu qu'on écrive « 30 est multiple de 10, donc 30 est multiple de 5 » ou bien « XXX est multiple de X, donc XXX est multiple de V »

En revanche la propriété B suppose implicitement que le nombre est écrit dans notre système décimal habituel. Elle n'a pas de sens pour un nombre écrit en chiffres romains, système qui ne possède pas de chiffre 0, et on verra plus loin qu'elle est fausse pour un nombre écrit en base 3.

Les propriétés suivantes sont suffisamment classiques pour être retenues, et utilisées en cas de besoin au concours sans autre justification :

Un nombre est divisible par 2 (ou pair) si et seulement si son chiffre des unités est pair.

Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Un nombre est divisible par 4 si et seulement le nombre formé par ses deux derniers chiffres est lui-même divisible par 4.

Un nombre est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est 0 ou 5.

Un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Un nombre est divisible par 25 si et seulement si il se termine par 00, 25, 50 ou 75.

Un nombre est multiple de 10 si et seulement si il se termine par 0.

Un nombre est multiple de 100 si et seulement si il se termine par deux zéros.

Bases autres que 10

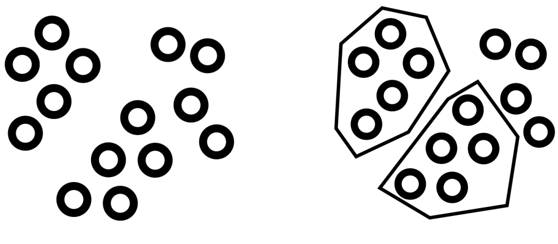
L'écriture des nombres dans les bases autres que 10 ne figure pas au programme du collège. C'est cependant une question récurrente dans les concours de recrutement pour la raison suivante : les difficultés que rencontrent des adultes avec le maniement des nombres dans une base autre que 10 sont très proches de celles que rencontrent les élèves de l'école élémentaire dans leur découverte du système décimal. Le travail dans une base autre que 10, qui nous prive de nos automatismes, oblige à considérer d'un œil neuf des questions telles que « pourquoi écrire un 0 à la droite d'un nombre entier a-t-il pour effet de le multiplier par 10 ? » ou « pourquoi pose-t-on la retenue de la soustraction ainsi ? »

C'est très probablement parce que nous avons dix doigts que l'usage des groupements par 10 pour dénombrer se retrouve dans un très grand nombre de civilisations.

Quand un de nos lointains ancêtres voulait garder la trace du nombre de bêtes de son troupeau, il pouvait lever un doigt pour chaque bête puis, quand les dix doigts étaient levés, faire une encoche sur un bâton pour garder en mémoire ce groupe de dix bêtes et recommencer. 5 encoches et trois doigts levés correspondent ainsi à ce que nous écrivons 53.

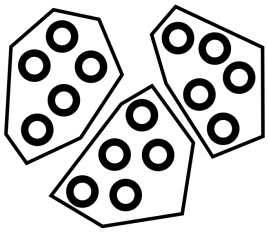
Pour comprendre l'écriture des nombres en base cinq, imaginons ce qui se serait passé si l'usage s'était imposé de faire une encoche après avoir levé les doigts d'une seule main.

La collection d'objets dessinée ci-dessous correspondrait à deux encoches et quatre objets isolés. Une fois inventés les chiffres, elle pourrait se noter $\overline{24}$.



Insistons immédiatement sur le fait que l'écriture $\overline{24}$ ne doit en aucun cas se lire « vingt-quatre » puisqu'il y a quatorze objets et non vingt-quatre. Le trait au-dessus des chiffres est précisément là pour nous alerter : il ne s'agit pas d'un nombre écrit dans notre système habituel. Si nous devons l'énoncer à l'oral, il faudra dire « le nombre qui s'écrit deux-quatre » ou encore expliciter la signification de cette écriture : « 2 paquets de cinq objets et 4 objets isolés ».

Que se passerait-il si l'on ajoutait un objet ?

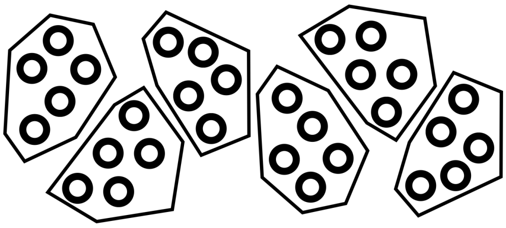


Nous avons maintenant 3 groupes de 5 objets, ce qui s'écrira $\overline{30}$ qui, rappelons-le, ne doit pas se lire « trente », mais s'interprète ainsi : « 3 paquets de cinq objets et 0 objet isolé ».

Le chiffre 0 a exactement la même fonction que dans notre système décimal usuel : indiquer que le chiffre « 3 » ne désigne pas 3 objets, mais trois groupes.

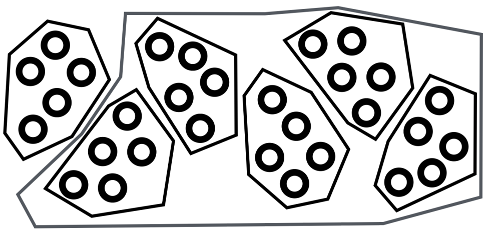
En base dix il n'existe pas de chiffre pour écrire dix, on l'écrit avec deux chiffres : 10, qui signifient un groupement de dix objets et aucun objet isolé. De même en base cinq il n'existe pas de chiffre pour écrire cinq, on l'écrit avec deux chiffres : $\overline{10}$ qui signifient un groupement de cinq objets et aucun objet isolé.

Rajoutons quelques objets.



Nous avons maintenant six groupes de cinq objets, il serait tentant de l'écrire $\overline{60}$, mais c'est impossible car on ne dispose que des chiffres 0, 1, 2, 3, 4.

On est donc conduit à effectuer un groupe de groupes pour obtenir ceci :



Il y a maintenant un grand groupe de cinq fois cinq objets, un petit groupe de cinq objets, et aucun objet isolé, ce que l'on écrit $\overline{110}$.

Imaginons maintenant (nous abandonnons les dessins, trop chargés) la quantité désignée par $\overline{444}$. Il s'agit de 4 groupes de 25 objets, 4 groupes de 5 objets et 4 objets isolés.

Ajoutons un nouvel objet, comment s'écrit le nouveau nombre d'objets ?

Nous avons maintenant 4 groupes de 25 objets, 4 groupes de 5 objets et 5 objets isolés.

Comme on ne dispose pas du chiffre 5, on regroupe les objets isolés, on a donc 4 groupes de 25 objets, 5 groupes de 5 objets et aucun objet isolé.

Comme on ne dispose pas du chiffre 5, on regroupe les groupes de 5 objets, on a donc 5 groupes de 25 objets, aucun groupe de 5 objets et aucun objet isolé.

Comme on ne dispose pas du chiffre 5, on regroupe les groupes de 25 objets, on a donc un groupe de 125 objets, aucun groupe de 25 objets, aucun groupe de 5 objets et aucun objet isolé.

En base 5, le nombre qui suit $\overline{444}$ est $\overline{1000}$. Il y a une forte analogie avec le fait que dans notre système usuel, le nombre qui suit 999 est 1000.

L'essentiel pour résoudre les problèmes qui peuvent vous être posés à propos de nombres écrits dans des bases autres que 10 est de retenir que

$\overline{3142}$ en base 5 signifie $3 \times 125 \ + \ 1 \times 25 \ + \ 4 \times 5 \ + \ 2$

Une écriture de la même chose, un peu moins simple mais qui montre mieux le caractère systématique du procédé est :

$\overline{3142} = 3 \times 5^3 \ + \ 1 \times 5^2 \ + \ 4 \times 5 \ + \ 2$

Si l'on veut aller plus loin encore pour montrer la régularité, on peut écrire :

$\overline{3142} = 3 \times 5^3 \ + \ 1 \times 5^2 \ + \ 4 \times 5^1 \ + \ 2 \times 5^0$

On notera que dans ces égalités, le membre de droite est écrit dans notre système ordinaire et non en base 5. Si on décidait de l'écrire en base 5, on obtiendrait :

$\overline{3142} = 3 \times \overline{10}^3 \ + \ 1 \times \overline{10}^2 \ + \ 4 \times \overline{10}^1 \ + \ 2 \times \overline{10}^0$ ce qui montre bien le fonctionnement identique à celui de la base dix.

Nous n'avons pas mis de trait au-dessus des nombres 1, 2, 3 ou 4. En effet, ces écritures ont la même signification qu'on les interprète en base cinq ou en base dix, il n'est donc pas utile de surcharger l'écriture.

Bien entendu, tout ce que nous venons de faire à propos de la base cinq serait également valable pour un travail en base 4, 3 ou 6.

Exemple d'exercice

Le nombre A s'écrit $\overline{2315}$ en base 6, quelle est son écriture dans le système décimal usuel ?

Pour ce type de question, il suffit d'avoir compris le principe de la numération de position en base 6 (le dernier chiffre compte des unités, le précédent des « sixaines », le précédent des « trente-sixaines ») et d'écrire la décomposition de A.

Solution rédigée

Le nombre A s'écrit $\overline{2315}$ en base 6 il est donc égal à $2 \times 216 \ + \ 3 \times 36 \ + \ 1 \times 6 \ + \ 5$ soit à 1620.

Exemple d'exercice

On donne B = 1620, donner l'écriture de B en base 4.

En base 4 on utilisera des unités puis des groupements par 4, 16, 64, 256, 1024, 4096.

4096 étant plus grand que 1620, il est clair qu'il n'y aura aucun groupement de 4096. Notre travail consiste donc à déterminer le nombre de groupements de chaque catégorie, ces nombres seront les chiffres de l'écriture en base 4.

Supposons par exemple qu'un nombre est égal à $1 \times 1024 + 3 \times 256 + 2 \times 64 + 0 \times 16 + 2 \times 4 + 3$, son écriture en base 4 est alors $\overline{132023}$

La détermination de la décomposition de 1620 se fait en utilisant autant que possible le calcul mental, il est par exemple facile de voir que dans 1620 il y a un groupement de 1024 et deux groupements de 256 qui, ensemble, font environ 1500. On écrit ainsi des décompositions successives de 1620.

Solution rédigée

$1620 = 1 \times 1024 + 596$

$1620 = 1 \times 1024 + 2 \times 256 + 84$

$1620 = 1 \times 1024 + 2 \times 256 + 1 \times 64 + 20$

$1620 = 1 \times 1024 + 2 \times 256 + 1 \times 64 + 1 \times 16 + 1 \times 4 + 0$

Cette décomposition nous fournit l'écriture en base 4 de 1620, c'est $\overline{121110}$.

Remarque : si les décompositions sont difficiles à établir, rien n'interdit de poser quelques opérations au brouillon, mais une suite de décompositions comme celle que nous proposons est suffisante pour justifier l'écriture du nombre en base 4.

Exercices

Exercices à propos des multiples et des diviseurs

Exercice 1

Parmi les nombres suivants, lesquels sont multiples de 12 ?

48 ; 6 ; 0 ; 30 ; 1 ; 12 ; 12000 ; 18

Exercice 2

Parmi les nombres suivants, lesquels sont diviseurs de 12 ?

48 ; 6 ; 0 ; 30 ; 1 ; 12 ; 12000 ; 18

Exercice 3

Existe-t-il un nombre qui soit à la fois multiple de 3681 et multiple de 6459 ?

Exercice 4

Décomposer le nombre 56000 en facteurs premiers.

Exercice 5

Trouvez tous les diviseurs du nombre 240.

Exercice 6

Un nombre N est multiple de 91, et également multiple de 52. Le nombre N est il un multiple de (91 x 52) ?

Exercice 7

Trouver tous les diviseurs communs aux nombres 264 et 312.

Exercices à propos de la division euclidienne

Exercice 8

Déterminer, en posant effectivement la division, le quotient et le reste de 567 083 par 63.

Exercice 9

Déterminer sans poser la division le reste de la division de 35 238 par 90.

Exercice 10

Déterminer, en posant effectivement la division, le quotient et le reste de 21 550 par 27. En déduire le quotient et le reste de la division de 215 503 par 27.

Exercice 11

Montrer comment il est possible de déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 35570 par 29 en utilisant uniquement des additions, des soustractions et des multiplications par 10, 100 ou 1000.

Exercice 12

Quel est le plus grand nombre entier s'écrivant avec 4 chiffres et dont le reste dans la division par 100 est égal à 38 ?

Exercice 13

Quel est le plus petit nombre entier de 5 chiffres dont le reste de la division par 29 est 18 ?

Exercice 14

La division euclidienne de 45 925 par 37 a pour quotient 1241 et pour reste 8. Déduire de ce qui précède : le quotient et le reste de la division de 46 000 par 37, le quotient et le reste de la division de 459 250 par 37, le quotient et le reste de la division de 459 250 par 370, le quotient et le reste de la division de 45 925 par 74.

Exercice 15

Est-il possible que deux nombres distincts aient à la fois le même quotient et le même reste dans la division par 17 ?

Exercice 16

Quel est le reste de la division de 444 444 444 444 444 444 444 444 par 9 ?

Exercice 17

Quel est le reste de la division de 555 555 555 555 555 555 555 par 11 ?

Exercices à propos des systèmes de numération

Exercice 18

On choisit un nombre entier positif de 2 chiffres. On écrit ce nombre à l'envers puis on calcule la somme des deux nombres. On divise pour finir la somme obtenue par 11.

Quel est le reste de la division ?

Exercice 19

Convertir en écriture décimale usuelle le nombre qui s'écrit $\overline{33333}$ en base 4.

Exercice 20

Quelle est l'écriture en base 3 de 194 ?

Exercice 21

Un nombre entier N a pour reste 7 dans la division euclidienne par 10. Quel est le reste dans la division euclidienne par 10 du nombre N^2 ?

Exercice 22

Existe-t-il des nombres qui s'écrivent avec 5 chiffres en système décimal usuel, et avec 6 chiffres en base 4 ?

Exercice 23

Démontrer que si un nombre N s'écrit $\overline{abc}$ en base 5 et si $a + b + c$ est multiple de 4, alors le nombre N est également multiple de 4.

Exercice 24

On considère un nombre entier A qui s'écrit avec 4 chiffres dans notre système décimal usuel : $A = \overline{abcd}$. On obtient le nombre B en insérant deux zéros entre le chiffre des centaines et le chiffre des dizaines de A ; $B = \overline{ab00cd}$.

Démontrer que le nombre B-A est multiple de 99.

Remarque : les traits surmontant les nombres signifient ici que l'on ne doit pas interpréter l'écriture $\overline{abcd}$ *comme on le ferait habituellement.* $abcd$ *signifie généralement* $a \times b \times c \times d$ *mais il est question ici du nombre qui s'écrit avec ces quatre chiffres.*

Exercice 25

Un nombre entier B s'écrit avec quatre chiffres.

La somme de son chiffre des milliers et de son chiffre des dizaines est égale à la somme du chiffre des centaines et de celui des unités.

Démontrer que le nombre B est multiple de 11.

Exercice 26

Combien y a-t-il de nombres entiers qui s'écrivent avec 3 chiffres en base 5 et avec 4 chiffres en base 4 ?

indications sur les exercices

Exercices à propos des multiples et des diviseurs

Exercice4

Commencez par une décomposition évidente, par exemple $56000 = 56 \times 1000$, puis décomposez à nouveau chacun des facteurs.

Exercice 5

Un exercice analogue est résolu dans la partie cours, consultez-le en cas de besoin.

Exercice 6

Décomposer 91 et 52 en facteurs premiers ne peut pas nuire.

Exercice 7

On peut soit chercher tous les diviseurs de chaque nombre puis comparer les deux listes, soit travailler à partir des décompositions en facteurs premiers.

Exercices à propos de la division euclidienne

Exercice 8

Si vous ne savez plus poser la division, consulter l'exemple page 188

Exercice 9

Une méthode possible consiste à chercher des diviseurs de 90 faciles à obtenir de tête, et à les ajouter ou les soustraire pour s'approcher de 35238 (la somme de deux multiples de 90 est un multiple de 90, leur différence également).

Exercice 10

- Le mot « déduire » dans l'énoncé vous impose de montrer le lien entre la division que vous avez posée et l'autre division dont vous devez donc déterminer le quotient et le reste sans la poser. Cependant, rien ne vous empêche de poser au brouillon la seconde division… connaître à l'avance le quotient et le reste auxquels vous devez aboutir ne peut pas faire de mal.
- Traduisez la première division par une écriture en ligne.
- Il est assez facile de passer de 21550 à 215503 par deux opérations successives simples, cela devrait vous guider pour transformer l'égalité $21550 = \dots\dots$, trouvée à l'étape précédente.

Exercice 13

Le nombre cherché est un des plus petits nombres entiers s'écrivant avec 5 chiffres, il est donc voisin de 10000, une méthode consiste donc à diviser 10000 par 29 et à utiliser ensuite le résultat de cette division.

Exercice 14

Comme souvent, une bonne méthode consiste à traduire la division donnée dans l'énoncé par une égalité en ligne, puis à fabriquer d'autres égalités à partir de celle-ci.

Exercice 16

Si vous ne savez pas reconnaître un nombre entier divisible par 9 d'après son écriture, consultez la partie sur les critères de divisibilité, page 192

Exercice 17

Des nombres comme 66, 770, 44000 ou 3300000 sont de façon évidente multiple de 11… servez vous-en.

Exercices à propos des systèmes de numération

Exercice 18

Commencez par faire quelques essais, ce qui devrait vous donner une idée du résultat. Des exemples ne sont pas une preuve, utilisez l'écriture algébrique pour généraliser.

Exercice 21

— On peut utiliser l'écriture algébrique, mais une solution plus simple est possible.
— Comment peut-on désigner autrement le reste de la division euclidienne d'un entier par 10 ?

Exercice 22

Quel est le plus petit nombre s'écrivant avec 6 chiffres en base 4 ? Quel est le plus grand ?

Exercice 23

Si un nombre N s'écrit $\overline{abc}$ en base 5, il vaut $25a + 5b + c$.
Essayez de modifier l'écriture $25a + 5b + c$ pour y faire apparaître clairement $a + b + c$.

Exercice 24

Comme bien souvent, la décomposition $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$ parait prometteuse.

Exercice 25

— Décomposer B sous la forme $1000m + 100c + 10d + u$ est un bon début.
— Puisqu'on sait que m+d = c+u, on va chercher à faire apparaître m+d dans le calcul et à le remplacer par c+u. À moins que le contraire ne soit plus efficace : faire apparaître c+u dans le calcul, puis le remplacer par m+d.

Exercice 26

Quel est le plus petit nombre s'écrivant avec 3 chiffres en base 5 ? Le plus grand ?

Solutions des exercices

Exercices à propos des multiples et des diviseurs

Exercice 1

48 ; 6 ; 0 ; 30 ; 1 ; 12 ; 12000 ; 18

$48 = 12 \times 4$ donc 48 est multiple de 12 ; $0 = 12 \times 0$ donc 0 est multiple de 12 ; $12 = 12 \times 1$ donc 12 est multiple de 12 ; $12000 = 12 \times 1000$ donc 12000 est multiple de 12.

30 et 18 ne sont pas multiples de 12. En effet, on peut écrire les égalités suivantes : $30 = 12 \times 2,5$ et $18 = 12 \times 1,5$, mais 2,5 et 1,5 ne sont pas des entiers.

Exercice 2

$12 = 6 \times 2$ donc 12 est multiple de 6, ce qu'on peut aussi exprimer en disant que 6 est diviseur de 12. La même égalité permettrait également d'affirmer que 2 est un diviseur de 12.

$12 = 1 \times 12$ donc 1 et 12 sont des diviseurs de 12. Il n'y a pas d'autre diviseur de 12 dans la liste.

Exercice 3

3681×6459 est à la fois multiple de 3681 et multiple de 6459. Il en existe évidemment d'autres, par exemple ceux obtenus en multipliant celui que nous proposons par un nombre entier, mais 3681×6459 est probablement le plus facile à trouver (avec 0 qui convient également).

Exercice 4

$56000 = 56 \times 10 \times 10 \times 10$

$56000 = 8 \times 7 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$

$56000 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$

$56000 = 2^6 \times 5^3 \times 7$.

Remarque : l'avant-dernière ligne fournit déjà la décomposition demandée, mais il est préférable de fournir une réponse ordonnée et facile à lire pour le correcteur.

Exercice 5

Commençons par décomposer 240 en facteurs premiers.

$240 = 24 \times 10 = 6 \times 4 \times 2 \times 5 = 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

Parmi les diviseurs de 240, certains ne comportent ni le facteur 3 ni le facteur 5. Ce sont : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16.

Certains comportent le facteur 3, mais pas le facteur 5, on les obtient en multipliant par 3 les précédents, ce sont : 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48.

Certains comportent le facteur 5, mais pas le facteur 3, on les obtient en multipliant par 5 ceux de la première liste, ce sont : 5 ; 10 ; 20 ; 40 ; 80.

Certains comportent les facteurs 3 et 5, on les obtient en multipliant par 3 ceux de la ligne précédente, ce sont : 15 ; 30 ; 60 ; 120 ; 240.

L'ensemble de ces quatre listes constitue la totalité des diviseurs de 240.

Remarque : d'autres méthodes sont possibles (voir partie cours).

Exercice 6

$91 = 7 \times 13$; $52 = 4 \times 13$. Le nombre $4 \times 7 \times 13$ est un multiple de 91, c'est aussi un multiple de 52 mais ce n'est pas un multiple de 91×52. On ne peut donc pas affirmer qu'un nombre multiple de 91 et de 52 est multiple de 91×52.

Exercice 7

$264 = 11 \times 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 11$

$312 = 8 \times 39 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 13$

Les diviseurs communs à 264 et 312 sont les diviseurs de la partie commune de leurs décompositions, c'est-à-dire de leur PGDC.

Cette partie commune est $2 \times 2 \times 2 \times 3$.

Les diviseurs communs à 264 et 312 sont donc :

$2 \times 2 \times 2 \times 3$; $2 \times 2 \times 3$; 2×3 ; 3 ; $2 \times 2 \times 2$; 2×2 ; 2 et 1.

Autrement dit, les diviseurs communs à 264 et 312 sont 24, 12, 6, 3, 8, 4, 2 et 1.

Exercices à propos de la division euclidienne

Exercice 8

567 083	63
-567 000	9001
83	
-63	
20	

Exercice 9

Les nombres suivants sont des multiples de 90 :

36 000 ; 900 ; 36 000 - 900 = 35 100 ; 35100 + 90 = 35190.

35 238 = 35 190 + 48 et 35 190 est un multiple de 90, le reste de la division de 35 238 par 90 est donc 48.

Exercice 10

21550	27
-189	798
265	
-243	
220	
-216	
4	

Le quotient de la division de 21550 par 27 est 798, son reste est 4.

La division posée ci-dessus peut se traduire par l'égalité 21550 = 798 x 27 + 4.

On déduit successivement de l'égalité ci-dessus les égalités suivantes :

215 500 = 7 980 x 27 + 40

215 503 = 7 980 x 27 + 43

215 503 = 7 980 x 27 + 27 + 16

215 503 = 7 981 x 27 + 16

La dernière égalité montre que le quotient de la division de 215 503 par 27 est 7 981 et le reste 16.

Exercice 11

Voici une des démarches parmi de nombreuses autres possibles :
$1000 \times 29 = 29000$ et $35570 - 29000 = 6570$ donc $35570 = 1000 \times 29 + 6570$.

$100 \times 29 = 2900$ donc $200 \times 29 = 2900 + 2900 = 5800$.
$6570 - 5800 = 770$ donc $6570 = 5800 + 770$, donc :
$35570 = 1000 \times 29 + 200 \times 29 + 770 = 1200 \times 29 + 770$.

$10 \times 29 = 290$ donc $20 \times 29 = 290 + 290 = 580$.
$770 - 580 = 190$ donc $770 = 580 + 190$, donc :
$35570 = 1200 \times 29 + 20 \times 29 + 190 = 1220 \times 29 + 190$.

$29 + 29 = 58$; $58 + 58 = 116$; $116 + 58 = 174$ donc $174 = 6 \times 29$.
$190 - 174 = 16$, donc $190 = 174 + 16 = 6 \times 29 + 16$.

On obtient finalement : $35570 = 1220 \times 29 + 6 \times 29 + 16 = 1226 \times 29 + 16$.
La dernière égalité montre que le quotient de la division euclidienne de 35570 par 29 est 1226 et le reste est 16.

Exercice 12

Les nombres entiers ayant pour reste 38 dans la division par 100 sont ceux dont l'écriture se termine par 38.
Le plus grand d'entre eux s'écrivant avec 4 chiffres est donc 9938.

Exercice 13

10 000 est le plus petit nombre s'écrivant avec cinq chiffres.

En posant la division de 10000 par 29 on trouve que $10000 = 344 \times 29 + 24$.

On en déduit $344 \times 29 + 18$ est plus petit que 10000, et que $345 \times 29 + 18$ est plus grand que 10000.

Le plus petit nombre de cinq chiffres ayant pour reste 18 dans la division par 29 est donc $345 \times 29 + 18$, soit 10023.

Exercice 14

La division euclidienne de 45 925 par 37 a pour quotient 1241 et pour reste 8, on en déduit que
$45925 = 1241 \times 37 + 8$.

On en déduit, en ajoutant 37 aux deux membres de l'égalité lors des premières étapes :

$45962 = 1242 \times 37 + 8$

$45999 = 1243 \times 37 + 8$

$46000 = 1243 \times 37 + 9$.

Le quotient de la division de 46000 par 37 est donc 1243, son reste est 9.

De $45925 = 1241 \times 37 + 8$ on peut également tirer $459250 = 12410 \times 37 + 80$, puis :

$459250 = 12410 \times 37 + 2 \times 37 + 6 = 12412 \times 37 + 6$.

Le quotient de la division de 459250 par 37 est donc 12412, son reste est 6.

L'égalité $459250 = 12410 \times 37 + 80$ que nous avons établie lors de la question précédente peut aussi s'écrire $459250 = 1241 \times 370 + 80$.

Le quotient de la division de 459250 par 370 est donc 1241, son reste est 80.

L'égalité $45925 = 1241 \times 37 + 8$ qui résulte de l'énoncé peut aussi s'écrire :

$45925 = 1240 \times 37 + 37 + 8$ ou $45925 = 620 \times 2 \times 37 + 45$, ou encore $45925 = 620 \times 74 + 45$.

Le quotient de la division de 45925 par 74 est 620, son reste est 45.

Exercice 15

Si on note q le quotient commun et r le reste commun, alors chacun des deux nombres est égal à 17q + r, il est donc impossible qu'ils soient différents.

Exercice 16

Ce nombre s'écrit avec 24 chiffres 4, la somme de ses chiffres est donc égale à 96.

Un nombre est multiple de 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est multiple de 9.

La somme des chiffres de 444 444 444 444 444 444 444 447 est égale à 99, ce nombre est donc multiple de 9.

Si on lui soustrait 9, on obtient 444 444 444 444 444 444 444 438 qui est donc multiple de 9

444 444 444 444 444 444 444 444 = 444 444 444 444 444 444 444 438 + 6, il vaut 6 de plus qu'un multiple de 9, son reste dans la division par 9 est donc égal à 6.

Exercice 17

Quel est le reste de la division de 555 555 555 555 555 555 555 par 11 ?

Les nombres suivants sont multiples de 11 :

550 000 000 000 000 000 000
5 500 000 000 000 000 000
55 000 000 000 000 000
550 000 000 000 000
5 500 000 000 000
55 000 000 000
550 000 000
5 500 000
55 000
550

Notons S la somme de ces nombres, comme chacun d'eux est multiple de 11, leur somme l'est aussi, il existe donc un entier k tel que S = 11 k

En calculant la somme des nombres ci-dessus, on voit que S + 5 = 555 555 555 555 555 555 555.

555 555 555 555 555 555 555 = S+5 = 11 k + 5, le reste de la division de ce nombre par 11 est 5.

Exercices à propos des systèmes de numération

Exercice 18

Notons d le chiffre des dizaines du nombre choisi, u son chiffre des unités. le nombre écrit à l'envers a pour chiffre des dizaines u et pour chiffre des unités d.

La somme des deux nombres est donc égale à 10d + u + 10u + d, soit 11d + 11u, ou encore 11 (d+u).

La somme des deux nombres est multiple de 11, par conséquent si on la divise par 11 le reste de la division sera 0.

Remarque : une rédaction faisant apparaître que la somme des deux nombres a pour chiffre des unités d+u et pour chiffre des dizaines d+u est fausse (59 + 95 = 154)

Exercice 19

La méthode standard consiste à écrire que $\overline{33333} = 3 \times 4^4 + 3 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 3$. Elle est parfaitement correcte.

Compte tenu de la forme particulière du nombre proposé, on peut aller un peu plus vite.

Le plus grand nombre s'écrivant avec 5 chiffres en base 4 et $\overline{33333}$.

Le nombre suivant est le premier nombre s'écrivant avec 6 chiffres en base 4, c'est $\overline{100000}$.

$\overline{100000}$ vaut 4^5 c'est-à-dire 1024. Son prédécesseur, $\overline{33333}$, est donc égal à 1023.

Exercice 20

En base 3, on utilise des groupements par 3, par 9, par 27, par 81, par 243...

243 étant supérieur à 194, on n'utilisera pas de groupements supérieurs à 81.

$194 = 2 \times 81 + 32$

$194 = 2 \times 81 + 1 \times 27 + 5$

$194 = 2 \times 81 + 1 \times 27 + 0 \times 9 + 1 \times 3 + 2 \times 1$

La décomposition qui précède fournit les chiffres de l'écriture de 194 en base 3, il s'agit de $\overline{21012}$.

Exercice 21

Le reste de la division par 10 d'un nombre entier, c'est aussi le chiffre des unités de ce nombre.

N a donc 7 comme chiffre des unités. Si on pose la multiplication de N par N selon la technique usuelle, on obtiendra comme chiffre des unités le chiffre des unités de 7×7, soit 9. Le reste de la division de N^2 par 10 est donc 9.

Exercice 22

Le nombre qui s'écrit $\overline{1000000}$ en base 4 est égal à 4^6 c'est-à-dire 4096.

Les nombres qui s'écrivent avec 6 chiffres en base 4 sont plus petits que $\overline{1000000}$, qui a 7 chiffres, c'est-à-dire plus petits que 4096.

Aucun d'entre eux ne s'écrit donc avec 5 chiffres en base 10.

Exercice 23

$\overline{abc} = 25a \ + \ 5b \ + \ c \ = \ 24a \ + \ 4b \ + \ (a + b + c)$

or $24a$ et $4b$ sont des multiples de 4. Si $(a + b + c)$ est également un muliple de 4, le nombre N est la somme de trois multiples de 4, c'est donc un multiple de 4.

Autre rédaction :

$\overline{abc} = 25a \ + \ 5b \ + \ c = 24a \ + \ 4b \ + (a + b + c)$

si $(a + b + c)$ est multiple de 4, on a $(a + b + c) = 4k$, où k est un entier. On obtient alors :

$\overline{abc} = 24a \ + \ 4b \ + (a + b + c) \ = \ 4\,(6a + b + k)$

Il résulte de la dernière égalité que N est alors multiple de 4.

Exercice 24

$A = 1000a + 100b + 10c + d\,;\, B = 100000a + 10000b + 10c + d$
$B - A = 100000a + 10000b + 10c + d - (1000a + 100b + 10c + d)$
$B - A = 100000a + 10000b + 10c + d - 1000a - 100b - 10c - d$
$B - A = 99000a + 9900b = 99\,(1000a + 100b)$
Cette dernière égalité montre que B-A est multiple de 99.

Exercice 25

Soient m, c, d, u les chiffres des milliers, centaines, dizaines et unités du nombre B.
$B = 1000m + 100c + 10d + u$
$B = 1000m + 99c + 10d + c + u$

or $c + u = m + d$, on a donc :
$B = 1000m + 99c + 10d + m + d$
$B = 1001m + 99c + 11d$
En posant la division de 1001 par 11, on constate que $1001 = 11 \times 91$, il en résulte que
$B = 11 \times 91m + 11 \times 9c + 11d = 11\,(91m + 9c + d)$
Cette dernière égalité montre que B est multiple de 11.

Exercice 26

Le plus petit entier s'écrivant avec trois chiffres en base 5 est $\overline{100}^5$ c'est-à-dire 25.

Le plus grand entier s'écrivant avec trois chiffres en base 5 est $\overline{444}^5$ c'est-à-dire $4 \times 25 + 4 \times 5 + 4$, soit 124.

Le plus petit entier s'écrivant avec quatre chiffres en base 4 est $\overline{1000}^4$ c'est-à-dire 64.

Le plus grand entier s'écrivant avec quatre chiffres en base 4 est $\overline{3333}^4$ c'est-à-dire $3 \times 64 + 3 \times 16 + 3 \times 4 + 3$, soit 255.

Les entiers entiers qui s'écrivent avec 3 chiffres en base 5 et avec 4 chiffres en base 4 sont donc tous les entiers de 64 à 124 inclus.

Il y en a donc 124 - 64 + 1, c'est-à-dire 61.

Remarques :

— *la plupart du temps, on n'utilise pas deux bases autres que dix dans un même exercice. Le trait au dessus du nombre pour signaler qu'il n'est pas écrit en base 10 suffit. Ici, la notation* $\overline{100}$ *resterait ambigüe car elle ne précise pas si on utilise la base 4 ou la base 5. Les chiffres placés en exposant permettent cette distinction (il ne s'agit pas ici d'élever un nombre à la puissance 4 ou 5).*

— *Pour ne pas risquer d'erreur sur l'étape finale, on peut se servir d'un exemple simple : de 61 à 63 il y a trois nombres (61, 62 et 63) or la soustraction 63 - 61 a pour résultat 2 et non 3. . . d'où l'ajout de 1.*