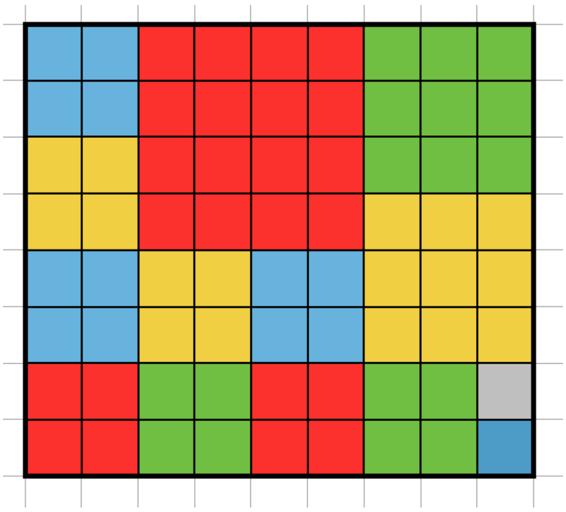
Découper en carrés

En bref

Il s'agit de découper diverses figures tracées sur quadrillage en morceaux tous carrés. Il doit y avoir le moins possible de morceaux.

Introduction du problème

L'enseignante affiche cette figure :



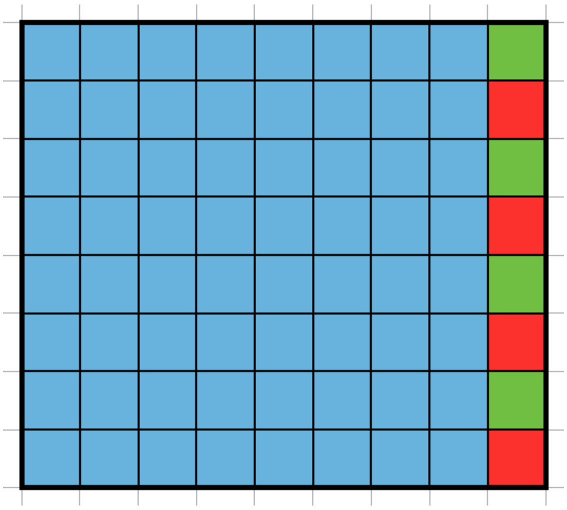
Le rectangle que j'ai affiché a 9 carreaux de long et 8 carreaux de large.

Je l'ai découpé en morceaux, les morceaux sont tous des carrés et il y en a 14.

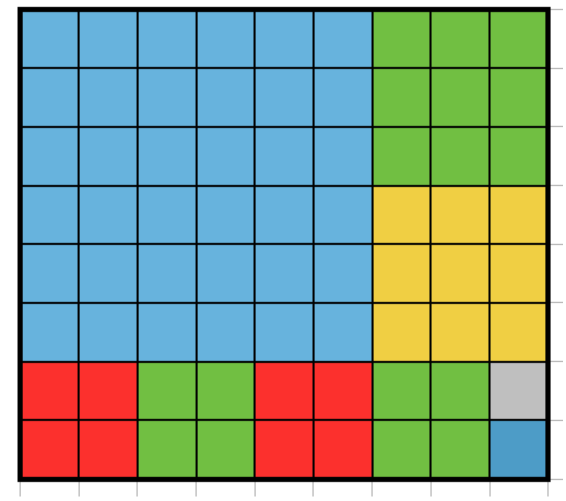
Je vous demande de découper vous aussi un rectangle de 9 sur 8 en morceaux carrés. Vous devez essayer d'avoir le moins de morceaux possible : s'il y en a 13, c'est bien, mais 12 est encore mieux. . .

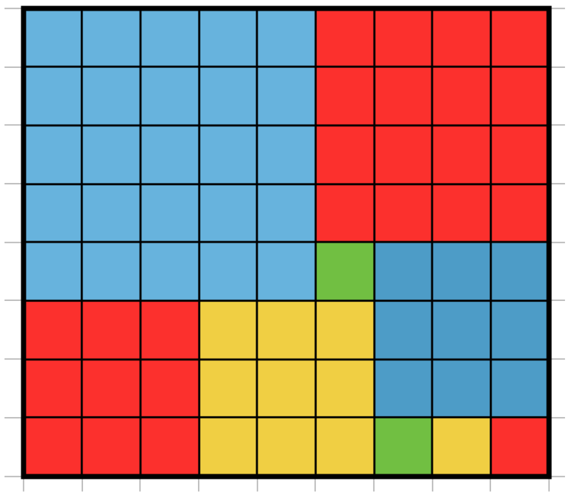
Éléments de relance

Il semble raisonnable de penser que pour avoir peu de morceaux il faut utiliser de grands morceaux, dans beaucoup de classes la proposition suivante sera donc faite assez rapidement.



Si les élèves pensent qu'il n'est pas possible de trouver un découpage en moins de 9 morceaux, l'enseignante les encourage en montrant qu'il existe d'autres façons d'obtenir 9 morceaux carrés auxquelles on ne pense pas tout de suite, par exemple celles-ci :





Avant que les élèves soient las de chercher à améliorer le découpage du rectangle 9x8, l'enseignante affiche ce tableau et explique son utilisation.

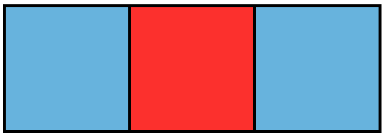
Découper un carré ou un rectangle en un petit nombre de carrés

Dimensions du rectangle.	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		3							
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8								9	
9									
10									

Nous allons continuer à essayer d'améliorer notre découpage du rectangle de 9 sur 8, mais nous essaierons aussi de découper d'autres rectangles. Ce tableau servira à résumer ce que nous allons trouver.

J'ai écrit 3 dans cette case du tableau. Cette case est dans la colonne numéro 3 et dans la ligne numéro 1.

Cela veut dire qu'elle parle du rectangle de 3 de long et 1 de large. Le 3 dans la case veut dire qu'on sait découper ce rectangle en trois carrés...



Le nombre 9 qui est écrit plus bas indique que l'on sait découper le rectangle 9x8 en 9 carrés.

Vous allez maintenant chercher d'autres découpages. Vous choisissez le rectangle ou le carré que vous voulez découper. La longueur des côtés ne doit pas dépasser 10 pour que vos résultats puissent être indiqués dans le tableau.

Gardez bien vos découpages, en tout cas ceux que vous trouvez réussis, de temps à autre nous ferons une mise en commun pour placer dans le classeur de recherche de nouveaux découpages et résumer dans le tableau ce qui a été trouvé.

Éléments de preuve

— Dans le tableau résumé, le nombre 3 qui dit que le rectangle 3x1 peut se découper en 3 carrés est écrit en rouge. Cela veut dire que personne ne peut faire mieux. Comme il n'y a qu'une façon de découper ce rectangle en carrés, ce n'est pas difficile d'être sûr que c'est la meilleure façon, ce n'est pas un grand exploit.

— Voyez-vous d'autres cases du tableau où l'on peut écrire un nombre en rouge tout de suite ? Les élèves devraient voir assez vite que les rectangles ayant une largeur de 1 peuvent se découper d'une seule façon en carrés comportant un seul carreau.

Découper un carré ou un rectangle en un petit nombre de carrés

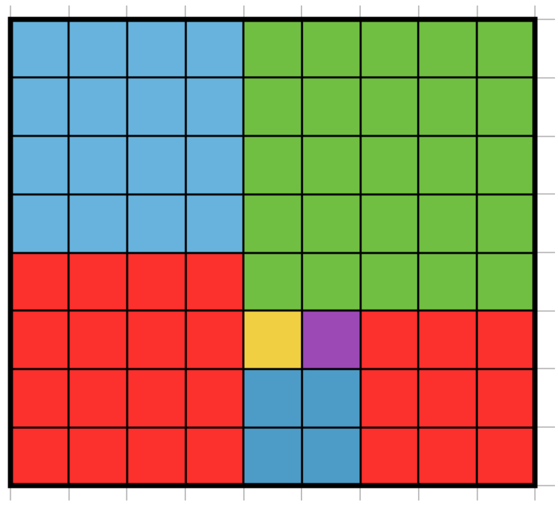
Dimensions du rectangle.	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8								9	
9									
10									

Le nombre 9 vers le bas du tableau est écrit en noir, cela veut dire qu'on sait faire un découpage en 9 carreaux mais qu'on ne sait pas s'il est possible de faire mieux : peut-on utiliser seulement 8 carrés, ou 7, ou 6…

Si un élève a trouvé un découpage du rectangle 9x8 en moins de 9 carrés, sa proposition est affichée et le tableau est rectifié.

Sinon, l'enseignante demande si on doit écrire le 9 en rouge puisque personne ne trouve mieux.

Elle laisse les élèves débattre brièvement de cette question puis montre ce découpage :



—Certains pensaient qu'on ne pouvait pas faire mieux que 9 carrés. Quand on a bien cherché quelque chose sans trouver, on pense souvent que c'est impossible… mais parfois on se trompe.

— Faut-il écrire le 7 qui résume ce nouveau découpage en noir ou en rouge ? En noir : trouver un découpage encore meilleur est certainement difficile, mais tant qu'on ne sait pas expliquer pourquoi c'est impossible il faut être prudent.

Dans la suite de la recherche, les nombres sont a priori écrits dans le tableau en noir.

Quand un élève prétend qu'un nombre peut être écrit en rouge, l'enseignante le questionne : comment sais-tu que personne ne pourra jamais faire mieux ? Elle n'hésite pas à étayer ou à reformuler les propositions d'explication, car la tâche est très difficile à ce niveau.

En cycle 3, on n'attend pas de démonstration formelle.

Pour prouver que le meilleur découpage du rectangle 9 x 3 comporte 3 carrés, on pourra par exemple dire :

— Sur ce rectangle, on ne peut pas tracer de carré plus grand que le carré 3x3.
— En utilisant seulement des carrés 3x3, le rectangle se découpe en 3 carrés.
— Si on remplace un carré 3x3 (ou plusieurs) par des carrés plus petits, il en faudra plus.

Pour prouver que le meilleur découpage du carré 6 x 6 comporte 4 carrés, on pourra par exemple dire :

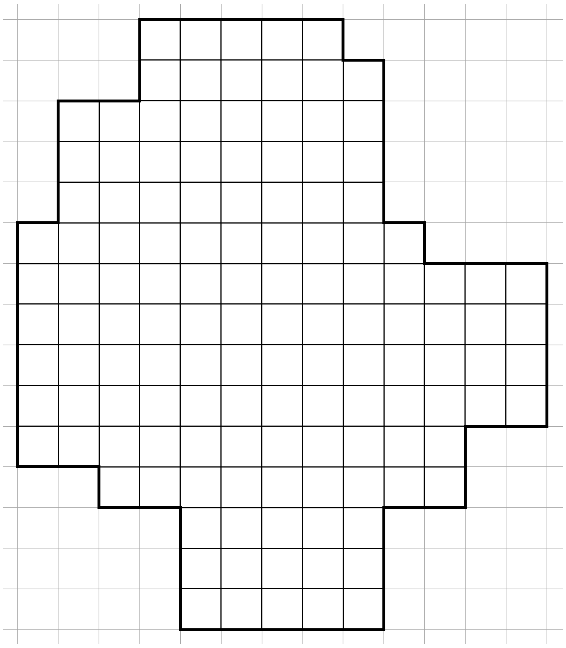
— On sait faire un découpage en 4 carrés 3x3.
— Deux cases de coin du carré 6x6 ne peuvent pas être dans le même morceau, sinon il n'y aurait qu'un seul morceau, ce n'est pas vraiment un découpage *(accepter ou non le « découpage » en un seul morceau est une convention, mais de type de « découpage » n'a pas d'intérêt).*
— Comme le carré 6x6 a 4 coins qui ne peuvent pas être dans le même morceau, il faut au moins 4 morceaux

Tant que la recherche sur ce problème se poursuit, un résultat n'est écrit en rouge que si l'enseignante sait que l'explication est correcte et si la quasi-totalité de la classe est convaincue. En cas de doute, le résultat est écrit en noir.

Aménagements pour le cycle 2

Au cycle 2, on n'essaiera pas de dégager des règles générales ni de prouver qu'un découpage est le meilleur possible. Nous conseillons de poser le problème du découpage en un nombre de carrés aussi petit que possible à propos d'une figure irrégulière telle que celle-ci.

Les possibilités sont en effet plus nombreuses que sur un rectangle. Par ailleurs la simple reproduction à l'identique de la figure modèle sur une feuille quadrillée est déjà un problème en CP voire en CE1.



Prolongements pour le cycle 4

Les propriétés générales mises en évidence en cycle 3 peuvent faire l'objet d'un travail de formulation à l'aide de l'écriture algébrique. L'enseignante ou un élève met en évidence une propriété en s'appuyant sur des exemples, les élèves doivent ensuite rédiger cette propriété de la façon la plus concise possible.

Ce travail étant difficile, nous conseillons de l'effectuer par petits groupes de 2 à 4 élèves après un temps de réflexion individuelle.

Voici quelques exemples de « théorèmes » auxquels on peut parvenir.

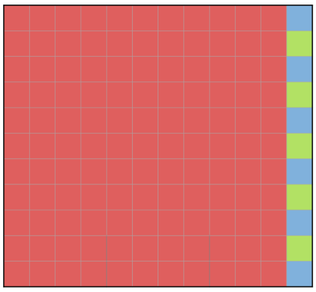
Si un rectangle a pour largeur 2, quel est le meilleur découpage en carrés ?
- Si la longueur est égale à 2n (n étant entier), le meilleur découpage comporte n carrés.
- Si la longueur est égale à 2n+1 (n étant entier), le meilleur découpage comporte n+2 carrés.

Si un rectangle de longueur L et de largeur l peut se découper en n carrés, alors le rectangle de longueur 2L et de largeur 2l peut aussi se découper en n carrés.

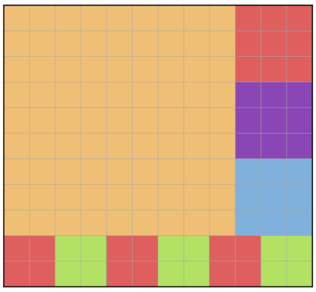
Compléments

Les rectangles dont la longueur est supérieur de 1 carreau à la largeur sont intéressants car, s'il existe un découpage assez évident, on peut généralement faire mieux.

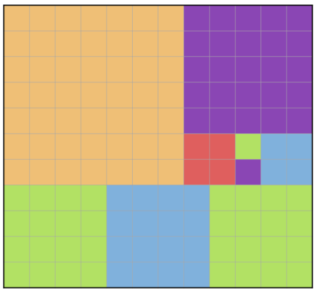
Par exemple, on peut découper un rectangle 12 x 11 comme ceci (c'est le découpage évident dont nous parlions plus haut) :



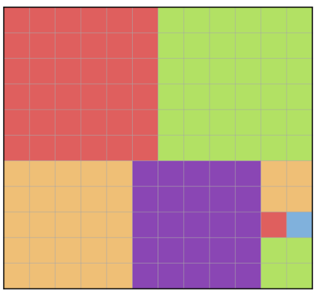
Mais on peut aussi le découper en 10 carrés :



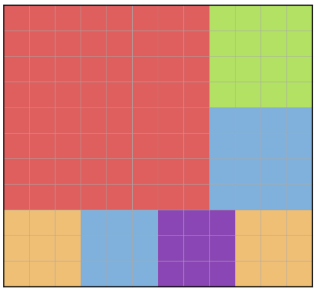
en 9 carrés :



en 8 carrés :

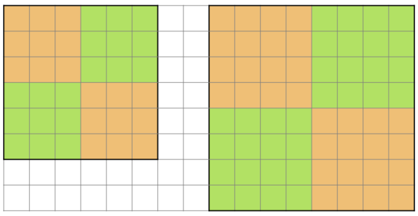


en 7 carrés :



peut-on le faire en 6 carrés ?

Le découpage de carrés dont le côté est pair n'est pas très intéressant, si ce n'est pour découvrir une règle générale…

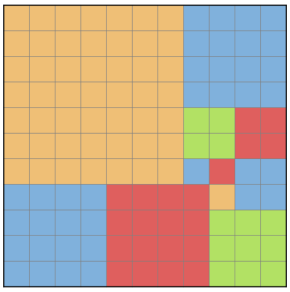


Il n'est pas beaucoup plus difficile de découvrir un découpage en 6 carrés utilisable pour tous les carrés dont le côté est multiple de 3.

En revanche, le découpage d'autres carrés n'est pas facile.

C'est le cas du carré de côté 11 que nous proposons ici bien que le tableau récapitulatif utilisé dans la présentation du problème n'envisage pas les côtés dépassant 10 carreaux.

Voici un découpage d'un carré 11x11 en 11 carrés plus petits :



et voici deux autre découpages du même carré 11x11 en 11 carrés… peut-on faire mieux ?