Introduire les nombres décimaux

Pourquoi l'introduction des décimaux[1] est-elle difficile ?

Une compréhension partielle du type « 3,4 mètres c'est 3 mètres et 4 petits bouts de mètres » permet d'obtenir des résultats corrects dans certains cas :

3,4 est plus petit que 3,7 puisque 7 petits bouts c'est plus que 4 petits bouts
3,5 + 2,4 = 5,9 parce que 5 petits bouts et encore 4 petits bouts c'est 9 petits bouts.

La même compréhension partielle conduit, avec d'autres nombres, à des résultats erronés :

3,4 est plus petit que 3,11 puisque 11 petits bouts c'est plus que 4 petits bouts
3,6 + 2,6 = 5,12 parce que 6 petits bouts et encore 6 petits bouts c'est 12 petits bouts

Si un élève ne rencontre pas assez souvent les cas difficiles, s'il « a juste » neuf fois sur dix en raisonnant comme ci-dessus, il peut s'en contenter.

Pour rester dans la formulation des « petits bouts » la difficulté vient du fait que les petits bouts n'ont pas tous la même taille.
Un gâteau et 3 petits bouts, c'est parfois plus qu'un gâteau et 8 petits bouts.

La convention utilisée pour indiquer la taille des petits bouts dans 3,5 ou 2,48 est particulièrement subtile : elle permet d'utiliser pour des nombres non entiers les techniques de calcul mises au point pour les nombres entiers au prix d'adaptations mineures. Cependant, elle est difficile à comprendre.

L'écriture fractionnaire a les avantages et inconvénients inverses : la convention est simple, mais les techniques de calcul sont entièrement à réinventer. L'écriture fractionnaire permet aussi de représenter certains nombres qui n'ont pas d'écriture décimale, comme $\frac{2}{3}$.

Il existe principalement deux approches pour introduire les nombres décimaux. L'une s'appuie sur les fractions, l'autre sur la mesure.

- L'appui sur les fractions (5,34 signifie $5 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100}$) suppose que celles-ci sont bien comprises, or leur introduction est souvent considérée comme difficile par les enseignants.
- L'appui sur la mesure (5,34 m cela signifie 5 m et 34 cm) est plus immédiat, mais favorise si l'on n'y prend garde les erreurs décrites au début de ce texte.

Nous proposons ici un récit basé sur la mesure qui tente d'éviter cette dérive.
ce récit explique aux élèves la finalité des décimaux, explicite la difficulté principale et précise la convention d'écriture utilisée. Il nécessite plusieurs séances assez brèves, après quoi on peut directement travailler avec des décimaux comportant 3 chiffres après la virgule.

---

[1] *Pour les mathématiciens, l'ensemble D des décimaux comprend les nombres écrits à l'aide d'une virgule que l'on appelle « décimaux » à l'école élémentaire, comme 4,5 ou 1,067 mais aussi les nombres entiers comme 7 ou 12. Nous utilisons ici « décimal » pour dire « décimal non entier », autrement dit nombre écrit à l'aide d'une virgule, afin d'alléger l'écriture.*

Séance 1

À quoi ça sert ?

Quand on compte des vélos ou des vaches, c’est facile.
Après 4 vélos c’est 5 vélos,
Après 8 vaches c’est 9 vaches.

Pour des gâteaux ou des litres de lait, c’est parfois plus difficile.
Il peut y avoir un peu plus de 3 gâteaux, mais moins que 4.
Il peut y avoir entre 1 et 2 litres de lait.

Nous allons apprendre une façon d’écrire avec des chiffres combien il y a de gâteaux ou de litres quand c’est entre 3 et 4 ou entre 1 et 2 ou encore entre 10 et 11.

l’idée de base :

Si une ligne mesure plus de 15 mètres, mais moins de 16 mètres, sa longueur en mètres s’écrira 15,4 ou 15,53 ou 15,12.

15,23 mètres, c’est entre 15 m et 16 m. C’est 15 mètres et 23 petits bouts de mètre.
Les 23 petits bouts ensemble font moins qu’un mètre.

3,8 gâteaux, c’est entre 3 gâteaux et 4 gâteaux. C’est 3gâteaux et 8 petits bouts de gâteau.
Les 8 petits bouts ensemble font moins qu’un gâteau.

125,5 kg, c’est entre 125 kg et 126 kg. C’est 125 kg et 5 petits bouts de kilogramme.
Les 5 petits bouts ensemble font moins qu’un kilogramme.

1,3520 litres, c’est entre 1 litre et 2 litres. C’est 1 litre et 3520 petits bouts de litre.
Les 3520 petits bouts ensemble font moins qu’un litre.

28,0 c’est 28 et 0 petit bout, c’est 28 et rien du tout, c’est la même chose que 28.

Séance 2

C’était trop simple

Ce qu’on a vu la dernière fois, c’est bien joli… mais ça ne sert pas à grand-chose.

Nous allons compter des bandes comme celle-ci avec des nombres à virgule.

3,2 bandes, c’est 3 bandes et 2 petits morceaux… mais quel genre de petit morceau ?

3,2 c’est ça ?

3,2 c’est ça ?

Ça ne sert à rien de savoir que 3,2 bandes c’est 3 bandes et 2 petits bouts si on ne connait pas la taille des petits bouts.

Quand j’écris 3 bandes ou 12 bandes, sans petit bout, tout le monde sait ce que je veux dire.
Peu importe si c’est Ahmed ou Maria qui prend les bandes, ils prendront la même chose.

Pour les petits morceaux, il faut aussi que tout le monde soit d’accord.
Imaginez deux maçons qui construisent une maison de 3,7 mètres de haut… s’ils ne sont pas d’accord sur la taille des petits bouts, leur maison risque d’être sérieusement penchée..

Heureusement, les mathématiciens ont inventé un système merveilleux qui répond à toutes ces questions, je vous le présenterai demain.

Séance 3

Continuer ce qu'on sait déjà faire

Les mathématiciens ont réfléchi : utiliser pour les petits bouts ce qui marche pour les grands nombres : observons l'écriture des grands nombre et voyons si cela nous donne des idées.

Dans l'écriture 7 5 9 mètres :

le chiffre 9, le dernier à droite, compte vraiment des mètres, des unités,

le chiffre 5 compte des groupes de 10 mètres, des dizaines,

le chiffre 7 compte des groupes de 10 fois 10 mètres ou 100 mètres, des centaines.

Chaque chiffre compte des choses 10 fois plus grandes que son voisin de droite.
Chaque chiffre compte des choses 10 fois plus petites que son voisin de gauche.

Si on se déplace d'un rang vers la gauche, on compte des choses 10 fois plus grandes.
Si on se déplace d'un rang vers la droite, on compte des choses 10 fois plus petites.

Pourquoi ne pas continuer comme ça vers la droite ?

Si nous écrivons le chiffre 2 à droite du chiffre des unités, cela voudra dire « 2 choses 10 fois plus petites que le mètre ». Ces morceaux s'appellent des dixièmes de mètres ou des décimètres.

Voici une bande d'un mètre de long :

1m 

Voici une bande d'un mètre et deux décimètres :

1,2 m 

Attention : la virgule est là pour signaler qu'on passe aux petits bouts, si j'oublie d'écrire la virgule, personne ne pourra savoir qu'il y a des petits bouts, on lira « douze mètres.

Si nous écrivons le chiffre 4 à droite du 2, cela voudra dire « 4 choses 10 fois plus petites que le décimètre ». Ces morceaux s'appellent des centièmes de mètre, ou des centimètres.
Voici une bande d'un mètre et deux décimètres et quatre centimètres :

1,24 m 

On peut continuer à ajouter des chiffres vers la droite, ils compteront des morceaux de plus en plus petits.

3,415 m c'est 3 mètres, 4 dixièmes de mètre, 1 centième de mètre et 5 millièmes de mètre.
2,603 m c'est 2 mètres, 6 dixièmes de mètre et 3 millièmes de mètre.
4,0025 m c'est 4 mètres, 2 millièmes de mètre et 5 morceaux dix fois plus petit que des millièmes.

Séances suivantes

Quelques exercices

Maintenant, vous savez tout ce qu'il y a à savoir sur les nombres à virgule.
Je vais vous demander d'en écrire.

Nous allons parler de bandes très longues, parfois de plusieurs kilomètres, alors je ne les ai pas toutes fabriquées. Nous allons souvent parler de bandes imaginaires.

Pour chaque exercice, je vous indiquerai dans un tableau comme celui-ci toutes les bandes qu'on met bout à bout pour obtenir une grande bande.
Votre travail est d'écrire sous la forme d'un seul nombre la longueur de cette bande, en mètres.

milliers	**centaines**	**dizaines**	**unités**	**dixièmes**	**centièmes**	**millièmes**
km	hm	dam	mètres	dm	cm	mm

Commençons : je fais une grande bande avec 6 bandes d'un décamètre.
Écrivez la longueur de cette grande bande, en mètres.

milliers	**centaines**	**dizaines**	**unités**	**dixièmes**	**centièmes**	**millièmes**
km	hm	dam	mètres	dm	cm	mm
		6				

La grande bande mesure 60 m.

Je fais une nouvelle bande avec les morceaux indiqués dans le tableau.
Écrivez la longueur de cette bande, en mètres.

milliers	**centaines**	**dizaines**	**unités**	**dixièmes**	**centièmes**	**millièmes**
km	hm	dam	mètres	dm	cm	mm
			4	**3**		

La bande mesure 4,3 m.

milliers	**centaines**	**dizaines**	**unités**	**dixièmes**	**centièmes**	**millièmes**
km	hm	dam	mètres	dm	cm	mm
			2		**4**	

La bande mesure 2,04 m

Ce troisième exemple est le premier à présenter une difficulté sérieuse : le chiffre 0 est indispensable. Il indique que le chiffre 4 signifie 4 cm et non 4 dm.
On fera l'analogie avec le premier cas : le 0 de 60 montre que le chiffre 6 signifie 6 dizaines.

Insistons sur le fait que l'écriture à l'intérieur du tableau n'est pas conforme à l'écriture décimale.

- La virgule n'est pas présente.
- Les zéros ne sont pas écrits.
- Une case du tableau peut contenir un nombre supérieur à 9

C'est indispensable à la bonne compréhension du système décimal.
Imaginons en effet un instant que l'on présente le troisième exercice comme ceci :

milliers	**centaines**	**dizaines**	**unités**	**dixièmes**	**centièmes**	**millièmes**
km	hm	dam	mètres	dm	cm	mm
			2 ,	**0**	**4**	

Les élèves n'auraient qu'à recopier ce qu'ils voient dans le tableau.
Rien ne mettrait en évidence la nécessité du zéro.

Ce ne serait pas mieux si on présentait aux élèves le tableau sans virgule ni zéro et qu'on leur demandait de compléter le tableau avant d'écrire le nombre hors du tableau.
En effet, à l'intérieur du tableau, virgule et zéro n'apportent aucune information : on sait que le chiffre 2 compte des unités et que le 4 compte des centièmes grâce aux intitulés des colonnes.
Dans ces conditions, demander l'écriture de la virgule et celle du zéro apparaitrait comme une exigence formelle dépourvue de signification.

Les tableaux qui suivent présentent des cas difficiles qui doivent être abordés.
Bien entendu, dans la réalité de la classe chaque difficulté sera présentée plusieurs fois, en alternance avec des cas plus faciles.

milliers	**centaines**	**dizaines**	**unités**	**dixièmes**	**centièmes**	**millièmes**
km	hm	dam	mètres	dm	cm	mm
			1	**15**		

On ne peut pas écrire 1,15 m car cela voudrait dire 1 m 1dm et 5 cm.
Il n'y a qu'un seul chiffre qui compte des dm : le premier chiffre après la virgule.
Il faut utiliser le fait que 10 dm = 1 m.
Alors 15 dm, c'est 1m et 5 dm.
Dans le tableau, il y a donc en tout 2 m et 5 dm, la longueur de la bande s'écrit 2,5 m.

milliers	**centaines**	**dizaines**	**unités**	**dixièmes**	**centièmes**	**millièmes**
km	hm	dam	mètres	dm	cm	mm
		3			**5**	

Pour montrer que le 3 signifie « 3 dizaines » et le 5, « 5 centièmes », il est nécessaire d'écrire deux zéros et la virgule.
La longueur de la bande s'écrit 30,05 m.

milliers	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes
km	hm	dam	mètres	dm	cm	mm
			5		**30**	

10 cm c'est 1 dm, alors 30 cm c'est 3 dm.
La longueur de la bande s'écrit 5,3 m.
On peut aussi l'écrire 5,30 m ou même 5,300 m, ça ne change rien.

milliers	centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes
km	hm	dam	mètres	dm	cm	mm
		4	**2**	**16**		**20**

Si, en fin de travail sur cette question, vos élèves parviennent à écrire que la grande bande fabriquée avec les morceaux indiqués par le tableau ci-dessus mesure 43,62 m vous pouvez sans crainte considérer qu'ils ont bien compris le principe de l'écriture décimale.

Pour inciter les élèves à réfléchir à des cas difficiles, on peut leur proposer de se lancer des défis.
Les élèves travaillent par groupes.
Chaque groupe remplit un tableau analogue à ceux proposés ci-dessus.
Tous les groupes doivent convertir le contenu de chaque tableau en un nombre de mètres écrit sous forme décimale.

Si l'enseignant peut mettre à disposition la feuille de tableur que nous proposons en téléchargement, ce travail peut devenir autonome puisque le tableur fournit le corrigé.

Compléments

Nous pensons que l'introduction des décimaux telle que nous la décrivons ci-dessus favorise moins les erreurs classiques qu'une introduction sans précautions du type :

« 2,45 m ça veut dire 2 m et 45 cm. »

Cependant, les difficultés demeurent.
On ne peut pas attendre des élèves qu'ils se remémorent à chaque utilisation d'un décimal l'ensemble des explications que l'enseignant a donné.
Avec l'entrainement, des automatismes s'installent, c'est normal et même recherché… mais les automatismes exigent des raccourcis et entrainent parfois une perte de sens.

Les pages suivantes proposent des réponses à des questions qui se poseront un jour ou l'autre.
Chaque enseignant choisira de les utiliser au moment qui lui semble le plus utile.

« Cinq virgule vingt-sept », ça veut dire quoi ?

Comme je suis un peu paresseux, je dis parfois « cinq virgule vingt-sept » pour lire 5, 27.

Pourtant, 5, 27 m c'est 5 mètres 2 décimètres et 7 centimètres.
2 morceaux et 7 morceaux, c'est 9 morceaux.
Si on compte tous les petits bouts ensemble, en oubliant qu'ils ne sont pas tous de la même taille, on en trouve 9 et pas 27.

Alors, d'où sort ce 27 ?
Pouquoi dire « cinq virgule vingt-sept » s'il n'y a pas vingt-sept petits bouts ?

L'enseignant peut laisser la question en suspens quelques instants et laisser les élèves y réfléchir. Si certains d'entre eux réussissent à fournir une explication, c'est parfait. L'enseignant se contente alors de reformuler, il rend l'explication plus claire pour les autres élèves.
Dans le cas contraire, il fournit l'explication lui-même.

Un décimètre, c'est 10 centimètres.
Alors, 2 décimètres et 7 centimètres, c'est 20 centimètres et 7 centimètres, c'est 27 centimètres.
5,27 m, c'est 5 m 2 dm et 7 cm, c'est aussi 5 m et 27 cm.
C'est pour ça qu'on peut dire « cinq virgule vingt-sept ».

2,14 m c'est 2 m et 14 cm,
3,46 l c'est 3 l et 14 cl,
4, 58 c'est 4 et 58 centièmes.

Et 3,425… est ce que ça veut dire quelque chose de le lire « trois virgule quatre-cent-vingt-cinq » ?

3,425 c'est 3 et 4 dixièmes et 2 centièmes et 5 millièmes.

Un centième, c'est 10 millièmes.
Alors 2 centièmes, c'est 20 millièmes.

Un dixième, c'est 10 centièmes ou 100 millièmes.
Alors 4 dixièmes c'est 40 centièmes ou 400 millièmes.

3,425 c'est 3 et 400 millièmes et 20 millièmes et 5 millièmes, c'est 3 et 425 millièmes
C'est pour ça qu'on peut dire « trois virgule quatre-cent-vingt-cinq ».

12,305 m c'est 12 m et 305 mm,
8,420 l c'est 8 l et 420 cl,
7,500 c'est 7 et 500 millèmes.

3,258794 c’est vraiment plus petit que 4 ?

3, 258794 m, c’est trois mètres et 258 794 petits bouts.
Même si les petits bouts sont vraiment tout petits, ce serait étonnant qu’en en mettant 258 794 les uns derrière les autres, ça ne fasse pas plus qu’un mètre.

L’enseignant peut laisser la question en suspens quelques instants et laisser les élèves y réfléchir. Si certains d’entre eux réussissent à fournir une explication, c’est parfait. L’enseignant se contente alors de reformuler, il rend l’explication plus claire pour les autres élèves.
Dans le cas contraire, il fournit l’explication lui-même.

Essayons d’écrire un nombre plus grand que 4 en commençant par « trois virgule quelque chose ».

Pour que mon nombre soit le plus grand possible, je vais mettre le plus possible de petits bouts… surtout au début, quand les bouts ne sont pas trop petits

Avec un chiffre après la virgule, je peux aller jusqu’à 3,9 c’est-à-dire 3 et 9 dixièmes.
Ce n’est pas assez pour faire 4 car 4 c’est 3+1 et pour faire un il faut 10 dixièmes.

Avec deux chiffres après la virgule, je peux aller jusqu’à 3,99 c’est-à-dire 3 et 99 centièmes.
Ce n’est pas assez pour faire 4 car pour faire 1 il faut 100 centièmes.

Avec trois chiffres après la virgule, je peux aller jusqu’à 3,999 c’est-à-dire 3 et 999 millièmes.
Ce n’est pas assez pour faire 4 car pour faire 1 il faut 1 000 millièmes.

Avec quatre chiffres après la virgule, je peux aller jusqu’à 3,9999
c’est-à-dire 3 et 9 999 dix-millièmes.
Ce n’est pas assez pour faire 4 car pour faire 1 il faut 10 000 dix-millièmes.

Avec cinq chiffres après la virgule, je peux aller jusqu’à 3,99999
c’est-à-dire 3 et 99 999 cent-millièmes.
Ce n’est pas assez pour faire 4 car pour faire 1 il faut 100 000 cent-millièmes.

Pourriez-vous écrire l’étape suivante ?

5,99999999999999999999999999999999999999999999999999999999
est plus petit que 6 (mais pas de beaucoup).

Comment comparer deux nombres décimaux ?

1 mètre et 25 centimètres, c'est plus qu'un mètre et 3 centimètres. Rien de plus simple.

1 mètre et 42 centimètres est-ce plus court qu'un mètre et 5 décimètres ? C'est moins facile, mais on voit bien qu'il y a une difficulté : les centimètres et les décimètres, ce ne sont pas les mêmes morceaux. Il faut réfléchir avant de répondre.

Si on écrit les longueurs en mètres à l'aide d'un nombre décimal, il faut faire très attention.
La taille des petits bouts n'est indiquée que par la place du chiffre.
Il n'est écrit nulle part « cm », « dm » ou « mm » pour nous signaler qu'il faut faire attention.

Si la partie avant la virgule n'est pas la même, on sait déjà faire :
12, 35 c'est entre 12 et 13 alors c'est plus petit que 13,4 ou que 27,2.

Si la partie avant la virgule est la même, il faut regarder les chiffres après la virgule.

Si les deux nombres ont autant de chiffres après la virgule, il n'y a pas de piège.
Quel est le plus grand nombre entre 4,523 et 4,398 ?
4,523 m c'est 4 m et 523 mm
4,398 m c'est 4 m et 398 mm
Pas difficile de savoir quel est le plus grand : c'est 4,523.

Quel est le plus grand nombre entre 7,23 et 7,35 ?
7,23 m c'est 7 m et 23 cm
7, 35 m c'est 7 m et 35 cm
Pas difficile de savoir quel est le plus grand : c'est 7,35.

Si les deux nombres n'ont pas autant de chiffres après la virgule : danger !

Quel est le plus grand nombre entre 4,9 et 4,23 ?
On pourrait croire que 4,23 est plus grand que 4,9 parce que 23 petits bouts c'est plus que 9 petits bouts, mais ce ne sont pas les mêmes petits bouts : il faut y regarder de plus près.
4 et 9 dixième c'est comme 4 et 9 dixième et 0 centième, alors 4,9 peut aussi s'écrire 4,90
4,90 est plus grand que 4,23.
4,9 est plus grand que 4,23.

Quel est le plus grand nombre entre 4,62 et 4,715 ?
4 et 6 dixième et 2 centièmes, c'est comme 4 et 6 dixième et 2 centième et 0 millièmes.
4,62 peut aussi s'écrire 4,620
4,620 est plus petit que 4,715 centièmes.
4,62 est plus petit que 4,715.

Comment poser une addition avec les nombres décimaux ?

Savez-vous pourquoi, quand on pose une addition avec les nombres ordinaires, sans virgule, on aligne les chiffres de droite ?

On l'oublie parfois, mais la raison est simple : en faisant comme ça, les unités sont sous les unités, les dizaines sous les dizaines, les centaines sous les centaines.
Si on n'alignait pas les nombres comme ça, on risquerait de se tromper, par exemple de compter des dizaines avec des unités. 3 dizaines plus 2 unités ça ne fait ni 5 dizaines ni 5 unités, on ne peut pas les compter ensemble.

Pour additionner des décimaux, si on aligne les chiffres de droite, c'est une vraie catastrophe :

```
        2, 3 4
  + 1 2, 1 5 7
  +        2 5
  +        1,9
```

Dans la colonne de droite, il y a 4 centièmes, 7 millièmes, 5 unités et 9 dixièmes.
Si on les compte ensemble, ça ne veut absolument rien dire.

Pour faciliter l'addition, il faut mettre les unités sous les unités, les dixièmes sous les dixièmes… ça oblige à réfléchir un peu plus qu'avec les nombres entiers.

```
       2, 3 4
  +  1 2, 1 5 7
  +  2 5
  +    1,9
```

Si les nombres ont tous une virgule, on peut aligner les virgules, ça aligne en même temps les unités, les dixièmes, les centièmes…

Pour les soustractions, ce n'est pas plus difficile, mais pour les multiplications et les divisions, nous apprendrons comment faire plus tard.