

Ai-je le droit d'écrire ceci ?  $3^{20} + 3^{20} = 6^{20}$

Prenons la question au sérieux.

La réponse est simple et incontestable : oui, vous avez le droit, aucune loi en vigueur en France ne s'y oppose.

Vous avez aussi le droit d'écrire « les vaches ont généralement 5 pattes ».

Avoir le droit d'écrire une affirmation n'entraîne pas que cette affirmation est vraie. Votre expérience vous permet probablement de savoir que l'affirmation concernant les vaches est fausse. Vous n'écrivez pas « les vaches ont généralement 5 pattes » parce que ce n'est pas la vérité, pas parce que c'est interdit.

Un premier progrès en mathématique consiste à bannir totalement les questions ressemblant à « ai-je le droit d'écrire... » pour plusieurs raisons :

- La réponse est toujours oui, ce qui n'apporte pas grand-chose.
- Cette formulation renvoie la réponse à une autorité supérieure supposée compétente (un prof de math, un juge, Dieu ?) et vous empêche de vous poser les vraies questions, celles qui peuvent vous faire progresser :

- Est-ce que je comprends bien ce que signifie  $3^{20} + 3^{20} = 6^{20}$  ?
- Est-il vrai que  $3^{20} + 3^{20} = 6^{20}$  ?
- Dans le cas où j'ignore si cette égalité est vraie, que puis-je faire pour le savoir ?

Étudions dans l'ordre les questions de l'encadré.

- Est-ce que je comprends bien ce que signifie  $3^{20} + 3^{20} = 6^{20}$  ?

$3^{20}$  signifie :

$3 \times 3$

Dans cette suite de multiplications, c'est le nombre 3 qui est écrit 20 fois (et non le signe de multiplication).

Si cela est clair, la phrase mathématique que nous étudions signifie que si on multiplie entre eux 20 nombres tous égaux à 3 et qu'on ajoute le résultat à lui-même, on obtient le même nombre que si on multiplie entre eux 20 nombres tous égaux à 6.

- Est-il vrai que  $3^{20} + 3^{20} = 6^{20}$  ?

La phrase étant bien comprise, il est temps de se demander si ce qu'elle dit est vrai.

Concernant les vaches, vous n'avez probablement même pas eu le temps de distinguer les deux questions : la compréhension et la certitude que l'affirmation était fausse ont été immédiates. En mathématiques, il est fréquent que l'on comprenne une affirmation sans pour autant savoir immédiatement si elle est vraie ou fausse.

Supposons que vous soyez justement dans cette situation d'ignorance momentanée. Rien n'est désespéré, c'est maintenant que vous allez commencer à faire des mathématiques. Faire des mathématiques consiste pour l'essentiel à chercher si des affirmations concernant les nombres, les grandeurs, les figures géométriques sont vraies.

Voyons quelques moyens de savoir si cette égalité est vraie :

- Calculer à la calculatrice  $3^{20} + 3^{20}$  et  $6^{20}$  puis comparer les deux résultats. Les résultats étant différents, l'affirmation étudiée est fausse.
- Étudier d'abord des affirmations proches, mais plus simples.

On est tenté de supposer que si  $3^{20} + 3^{20} = 6^{20}$  est vrai, c'est en vertu d'une propriété (qu'il faudrait expliciter) selon laquelle les affirmations suivantes seraient également vraies :

$$3^{10} + 3^{10} = 6^{10} \qquad 3^5 + 3^5 = 6^5 \qquad 3^2 + 3^2 = 6^2$$

La dernière phrase de cette liste est fausse.

Elle affirme en effet que  $9 + 9 = 36$ .

Ce résultat doit rendre méfiant : la règle que nous avons imaginée est fausse pour des valeurs simples, quand on peut effectuer les opérations de tête. Cela ne prouve pas que la phrase étudiée est fausse, mais cela doit dissuader de faire comme si elle était vraie pour simplifier un calcul.

- Modifier l'écriture des deux nombres à comparer pour faciliter la comparaison. On s'appuie pour cela sur des propriétés élémentaires dont on est certain.

Nous vous proposons d'utiliser ici la connaissance suivante :

*L'addition de plusieurs nombres égaux peut se traduire par une multiplication, ce qui permet de dire que les phrases suivantes sont vraies :*

$$4 + 4 + 4 = 3 \times 4 \quad \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 5 \times \frac{2}{3} \quad 3^{20} + 3^{20} = 2 \times 3^{20}$$

Remarquons que dans la troisième phrase, celle qui nous intéresse, le terme de droite signifie « le double de  $3^{20}$  » et non « le nombre  $2 \times 3$  élevé à la puissance 20 ».

Autrement dit,  $3^{20} + 3^{20}$  c'est la même chose que :

$$2 \times 3$$

en effectuant la première multiplication, on peut dire que c'est aussi la même chose que :

$$6 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

Rappelons que nous cherchions à savoir si ce nombre était égal à :

$$6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$$

Il est maintenant clair que la phrase étudiée est fautive. On compare deux suites de multiplications dans lesquelles il y a autant de nombres. Le premier nombre est égal dans les deux calculs, ensuite il est toujours plus grand dans le second calcul.

On peut conclure que  $3^{20} + 3^{20}$  n'est pas égal à  $6^{20}$ .

$3^{20} + 3^{20}$  est même considérablement plus petit que  $6^{20}$

Si vous êtes au début de votre parcours de réconciliation avec les mathématiques, vous trouvez peut-être que tout cela est bien long (sous-entendu, je n'aurai jamais le temps de penser à tout ça le jour du concours).

C'est vrai, c'est long, et c'est seulement avec l'entraînement que ces raisonnements deviendront rapides. Mais faire l'économie de ces détours vous expose à reproduire encore et encore ce qui ne vous a pas réussi lors de vos cours de mathématique au collège ou au lycée.

Les mathématiques que nous vous proposons sont élémentaires, mais difficiles.