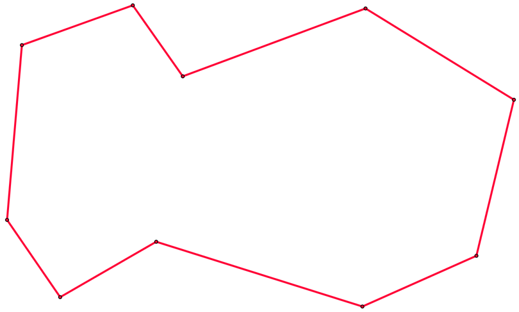
Le décagone à découper

En bref

Découper un décagone en un nombre minimum de triangles. Il ne s'agit pas de trouver un procédé pouvant s'appliquer à n'importe quel décagone, le choix du décagone est aussi important que le choix du procédé

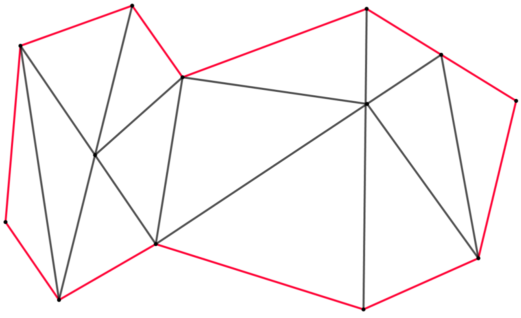
Introduction du problème

L'enseignante trace au tableau un décagone.



—J'ai dessiné un décagone, c'est-à-dire un polygone qui a 10 côtés.

Elle trace des segments de façon à découper le décagone en triangles.



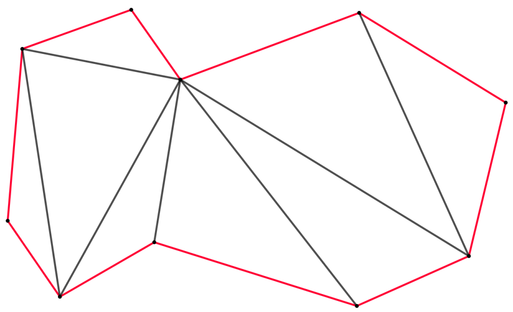
Elle compte les morceaux.

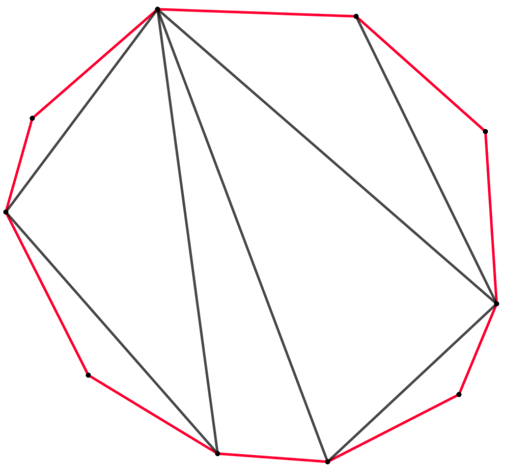
—J'ai partagé mon décagone en 13 triangles. Votre travail consiste à dessiner un décagone et à le découper en triangles. Il doit y avoir le moins possible de triangles. Si vous obtenez 12 triangles, c'est mieux que ce que je viens de faire, s'il y en a 11 c'est encore mieux…

Vérifiez bien que votre figure a 10 côtés et que tous les morceaux sont des triangles.

Lors de la mise en commun des recherches, quelques propositions parmi celles qui comportent le moins de triangles sont reproduites au tableau et vérifiées : la figure est-elle bien un décagone ? Y a-t-il le nombre de morceaux annoncé ? Les morceaux sont-ils tous des triangles ?

Les propositions à 8 triangles apparaissent rapidement dans la plupart des classes. Elles sont généralement obtenues en traçant à l'intérieur du décagone des diagonales choisies pour ne pas se couper. Ce procédé est explicité.





L'enseignante félicite les auteurs de ces propositions et demande aux autres élèves de réaliser eux aussi le découpage d'un décagone en huit triangles.

Éléments de relance

L'enseignante rappelle que la meilleure solution connue dans la classe est le découpage d'un décagone en 8 triangles. Elle demande aux élèves s'ils pensent utile de chercher encore ou s'ils sont plutôt d'avis qu'il est impossible de découper un décagone en moins de 8 triangles.

Si beaucoup pensent qu'on peut obtenir moins de 8 triangles, elle accorde un temps de recherche assez bref puis fait une mise au point :

— En réalité, ce problème comporte un piège. Quand on le cherche, on trace en général le décagone un peu au hasard puis on commence à réfléchir à la façon de le découper. Quelqu'un parmi vous a-t-il fait autrement ?

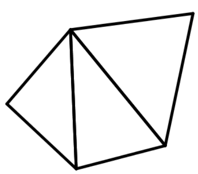
Il est plus que probable que la réponse est non.

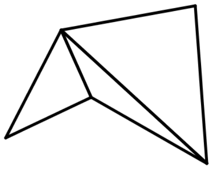
— Si on choisit le décagone au hasard, on ne peut en général pas obtenir moins de 8 triangles, c'est ce qui vous est arrivé. La difficulté de ce problème est de bien choisir le décagone. Je ne cherche pas à vous piéger, je vous assure qu'il y a des décagones qu'on peut partager en moins de 8 triangles.

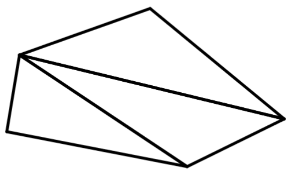
Un temps de recherche assez bref est consacré à la recherche de tels décagones. Il est peu probable que des élèves réussissent sans aide supplémentaire et on ne laissera pas le découragement s'installer.

— Comme c'est vraiment difficile, je vais vous aider. Imaginons un instant que nous ayons cherché le même problème avec un pentagone, un polygone à 5 côtés au lieu de 10.

Nous aurions réussi assez à découper un pentagone en 3 triangles (l'enseignante trace quelques pentagones au tableau puis les découpe en triangles)

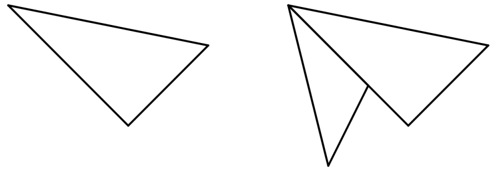




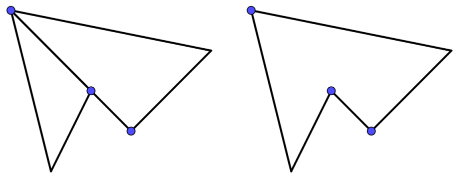


…mais nous aurions du mal à découper un pentagone en seulement 2 triangles.

Pourtant, en dessinant un premier triangle puis un deuxième comme ceci, je réussis à obtenir un pentagone découpé en deux triangles.



Le pentagone obtenu a quelque chose de spécial : les trois sommets marqués en bleu sont alignés. C'est pour ça qu'en traçant des pentagones au hasard on ne réussit presque jamais à les découper en deux triangles : il est très rare que trois sommets soient alignés par hasard.



En utilisant cette méthode, nous pourrons peut-être fabriquer un décagone avec moins de 8 triangles.

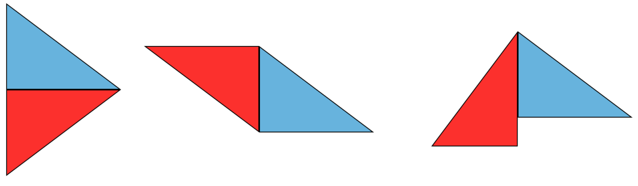
La séance s'arrête après cette explication. La recherche reprend plus tard soit en classe soit par l'intermédiaire du classeur de recherches.

Aménagements pour le cycle 2

On étudie directement des assemblages de triangles, et non des découpages de polygones.

L'enseignante dispose au tableau des triangles rectangles identiques.

— Avec deux triangles, je peux former un triangle comme ceci, ou encore un quadrilatère, ou une figure à 5 côtés comme cela…



Nous allons faire le même travail en assemblant 4 triangles au lieu de 2.

Chacun de vous invente une figure en assemblant 4 triangles. Les triangles doivent se toucher par leurs côtés, mais pas se superposer. Quand votre figure vous plait, vous la collez sur une feuille.

Pendant ce temps de fabrication, qui doit être assez rapide puisqu'à ce stade il n'y a guère d'enjeu mathématique, l'enseignante prépare au tableau des zones intitulées « 3 côtés », « 4 côtés »… et ainsi de suite jusqu'à 15 côtés.

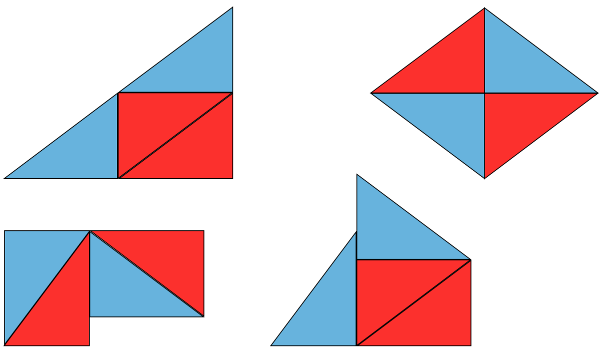
Elle demande aux élèves d'écrire à côté de leur figure son nombre de côté. Chaque élève vient ensuite afficher sa production dans la zone qui convient.

Le travail se poursuit ensuite en alternant des temps de recherche et des mises en commun pour fabriquer des figures ayant un nombre de côté pas encore obtenu.

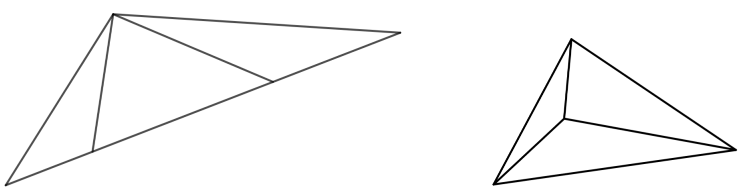
L'enseignante peut proposer de dessiner les triangles au lieu de coller ce qui permet d'utiliser des triangles variés.

Le passage au dessin ne devrait pas poser de problème en CE1 ou CE2, en revanche, au CP, il sera nécessaire d'expliquer que quand on dessine le deuxième (ou le troisième) triangle, il n'est pas nécessaire de redessiner les segments déjà tracés.

Quand l'enseignante décide d'interrompre la recherche collective, un ou deux exemples sont placés dans le classeur de recherches pour chaque nombre de côtés qui a été trouvé, des pages vierges sont laissées pour les nombres non encore obtenus.

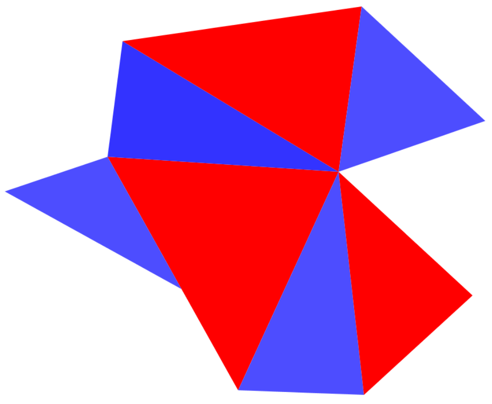


Nous ne conseillons pas de proposer la même recherche avec 3 triangles seulement. En effet, si on utilise seulement les triangles rectangles fournis il est impossible de réaliser un triangle en assemblant 3 triangles. C'est pourtant possible en dessinant, au prix d'un retournement aussi difficile que celui décrit ci-dessus pour le cycle 3 : penser à partager un grand triangle plutôt que d'en assembler trois petits.



Aménagements pour le cycle 4

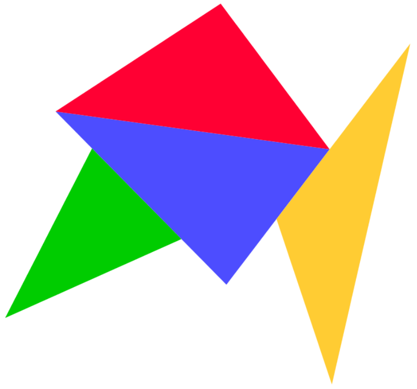
L'enseignant ne montre pas comment partager un pentagone en deux triangles. Si la classe, comme c'est probable, bute sur la limite des 8 triangles, elle se contente de certifier que pour certains décagones (la difficulté étant précisément de choisir lesquels) il est possible de faire un découpage en moins de 8 triangles. Si les élèves mettent en doute cette affirmation, elle dessine un décagone partagé en 6 ou 7 triangles et, sans le montrer aux élèves, fait vérifier par une personne extérieure à la classe que la figure a bien les caractéristiques annoncées.

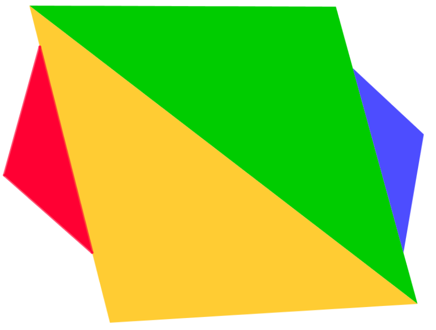


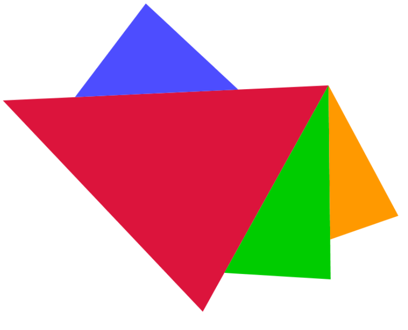
On peut chercher à exprimer le nombre minimum de triangles permettant de réaliser (par assemblage sans superpositions) un polygone à n côtés, en fonction de n.

Compléments

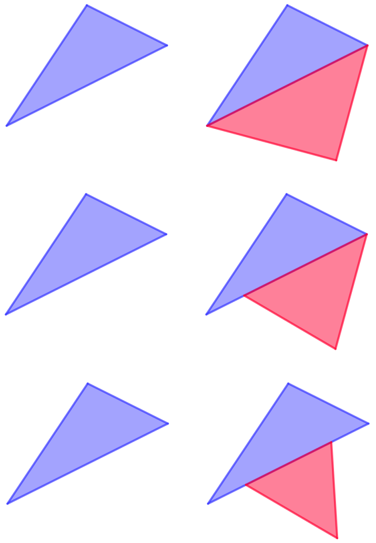
Voici plusieurs façons de découper un décagone en 4 triangles, ou plus exactement de construire un décagone avec 4 triangles







Les figures qui suivent montrent plusieurs façons d'ajouter un triangle rouge à un polygone bleu.



Selon l'assemblage choisi, le nombre de côtés du polygone augmente de 1, de 2 ou de 3.

Il n'est pas possible de faire augmenter le nombre de côtés du polygone de plus que 3 en ajoutant un seul triangle. Pour s'en convaincre on peut faire glisser le triangle rouge le long du côté bleu auquel on l'assemble et observer toutes les positions. La conclusion pourrait dépendre de la taille respective du côté bleu et du côté rouge qu'on assemble, on essaiera donc avec un côté rouge plus grand que le bleu, avec un côté rouge plus petit que le bleu et avec un côté rouge égal au bleu.

Une fois convaincu que l'ajout d'un triangle rajoute au plus 3 côtés, en partant d'un triangle et en ajoutant deux autre triangles le nombre maximum de côtés qu'on peut atteindre est 9 (3+3+3). Pour en obtenir 10, il faut donc ajouter au 4 triangles.

Remarque sur une démarche mathématique féconde :

Certains lecteurs pensent peut-être que prendre le problème à l'envers en assemblant des triangles pour former un décagone une simple astuce sans grande portée mathématique. Il s'agit en réalité d'une démarche extrêmement féconde.

En voici trois exemples élémentaires.

Compter les cordes à sauter. Les cordes à sauter d'une école maternelle forment un énorme nœud. Comment les compter sans défaire le nœud ?

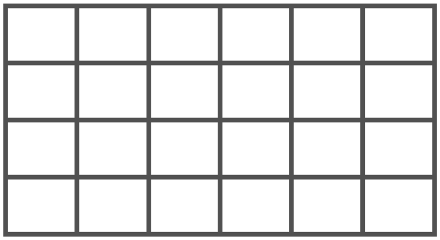
En comptant les poignées et en divisant par deux.

Dessinez deux figures concaves, découpez-les puis assemblez les (sans supperposition) pour obtenir une figure convexe. Si les figures concaves sont choisies au hasard, ce n'est généralement pas possible.

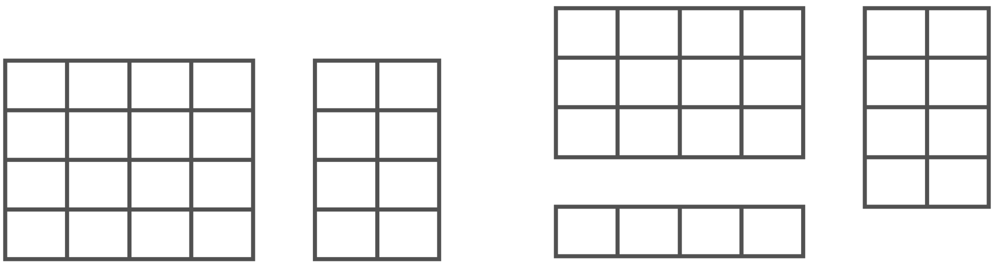
En dessinant une figure convexe que l'on partage ensuite par un trait en zigzag, on obtient deux figures concaves répondant à la question.

Le problème de la tablette de chocolat.

On dispose d'une tablette de chocolat de 6 carreaux sur 4.



On la casse en 2 morceaux en suivant une des lignes puis on prend un des morceaux et on le casse en deux.



On continue en cassant un morceau à chaque étape jusqu'à ce qu'on soit obligé d'arrêter parce que chaque morceau se réduit à un seul carreau. Il y a beaucoup de façons différentes de procéder à un tel découpage.

En expérimentant on constate que très souvent après 23 étapes la tablette est découpée en petits carreaux

Existe-t-il une méthode pour avoir uniquement des petits carreaux en moins de 23 étapes ?

Le changement de point de vue décisif consiste ici à s'intéresser seulement au nombre de morceaux, sans se soucier de leur forme ni du choix de l'endroit où l'on casse.

Comme chaque étape ajoute un nouveau morceau (le morceau que l'on casse est remplacé par deux morceaux plus petits) il faut toujours 23 étapes pour passer de 1 morceau (la tablette entière) à 24 morceaux (les carreaux isolés).