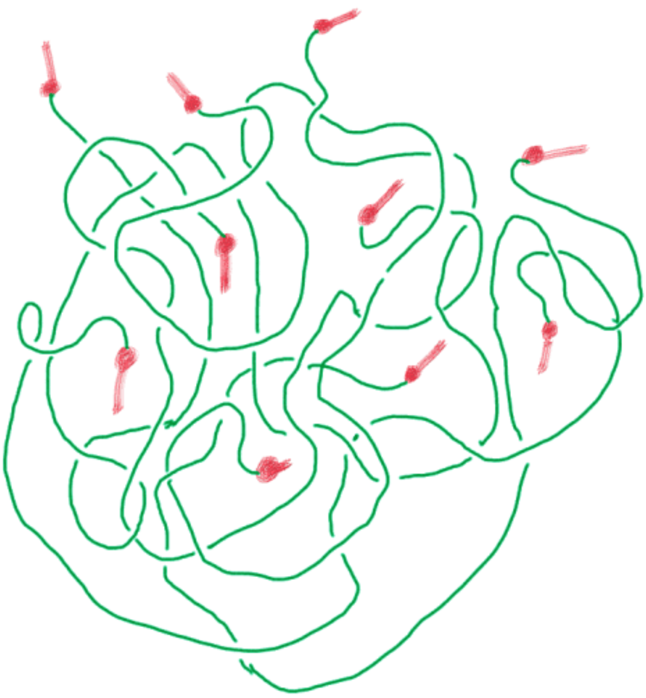
Problèmes de dénombrement 2

Voici les cordes à sauter de la classe maternelle. Combien y en a-t-il ?



La méthode la plus simple est probablement de compter les poignées (il y en a dix) et de déduire que puisque chaque corde a deux poignées, il y a 5 cordes.

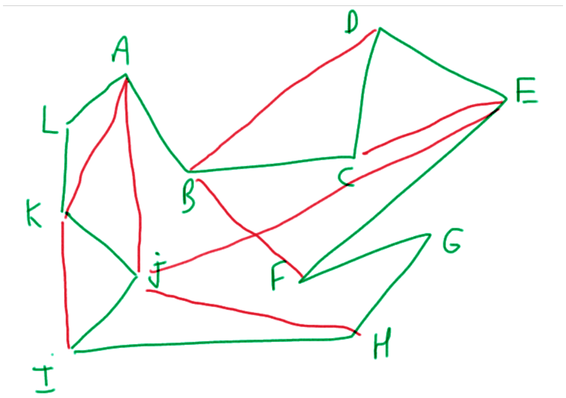
Cette façon de faire est parfois utile pour dénombrer des objets mathématiques si on ne trouve pas de partition (voir document précédent).

L'idée est la suivante : s'il n'est pas facile de compter chaque objet une fois et une seule, on peut accepter de compter chaque objet plusieurs fois. Si chaque objet est compté 3 fois, il suffit de diviser le résultat obtenu par 3 pour obtenir le nombre correct d'objets.

Combien un polygone ayant douze sommets a-t-il de diagonales ?

Il est nécessaire d'être d'accord sur ce que sont les diagonales d'un polygone : ce sont tous les segments joignant deux sommets du polygone, à l'exclusion des côtés.

Ainsi, tous les segments rouges de la figure suivante sont des diagonales du polygone vert ABCDEFGHIJKL.



La première idée qui vient à l'esprit est souvent de classer les diagonales ainsi :

Les diagonales dont A est une extrémité,
Les diagonales dont B est une extrémité,
Les diagonales dont C est une extrémité...

Malheureusement, il ne s'agit pas d'une partition, en effet, la diagonale [BG] est comptée dans la catégorie "les diagonales dont B est une extrémité", elle est à nouveau comptée dans la catégorie "les diagonales dont G est une extrémité".

Cette remarque vaut pour toutes les diagonales. Les catégories envisagées restent donc utiles : elles ne constituent pas une partition, mais si on additionne leurs effectifs chaque diagonale sera comptée deux fois... il suffira de diviser cette somme par deux pour obtenir le nombre correct de diagonales.

Il y a 9 diagonales ayant pour extrémité A (l'autre extrémité peut être n'importe lequel des 12 points sauf A, B ou L).

Il y a de même 9 diagonales ayant pour extrémité B, 9 diagonales ayant pour extrémité C... La somme des effectifs des 12 catégories est donc 12 x 9, et **le nombre de diagonales est (12 x 9) / 2 = 54.**

Et si on voulait s'en tenir strictement à l'idée de partition ?

Une première possibilité serait d'adapter les catégories de la méthode précédente pour que chaque diagonale soit dans une catégorie et dans une seule par exemple ainsi :

Les diagonales ayant A pour extrémité,
Les diagonales ayant B pour extrémité, mais pas A,
Les diagonales ayant C pour extrémité, mais ni A ni B,
Les diagonales ayant D pour extrémité, mais ni A ni B ni C,
…

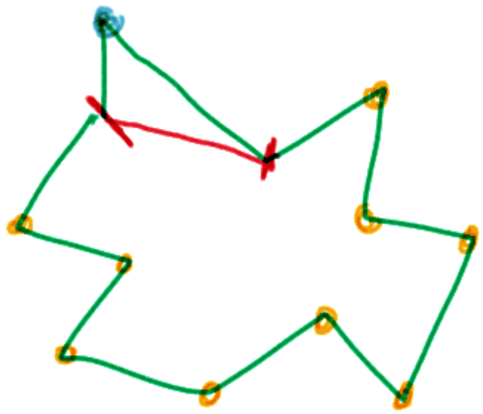
On peut alors dénombrer chacune des catégories, dont les effectifs sont respectivement
9, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0 (quand on arrive à K, toutes les diagonales ayant K pour extrémité ont déjà été comptées dans une autre catégorie).

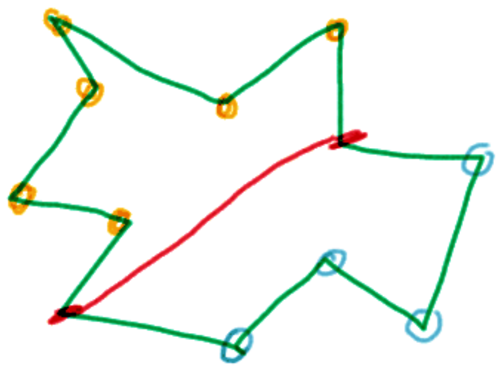
Le nombre de diagonales est donc 9 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 54.

Une autre partition

Imaginons que le polygone soit coupé en deux parties, les coupures étant faites aux extrémités d'une diagonale. Parmi les 10 sommets restants du polygone, combien chacune des deux lignes en contient-elle ?

Sur le schéma de gauche, une ligne contient un sommet (bleu) et l'autre 9 (oranges).
Sur le schéma de droite, une ligne contient 4 sommets (bleus) et l'autre 6 (oranges).





Cette remarque suggère une partition dont voici les catégories :

Les diagonales qui partagent les 10 sommets restant en groupes d'effectifs 1 et 9
Les diagonales qui partagent les 10 sommets restant en groupes d'effectifs 2 et 8
Les diagonales qui partagent les 10 sommets restant en groupes d'effectifs 3 et 7
Les diagonales qui partagent les 10 sommets restant en groupes d'effectifs 4 et 6
Les diagonales qui partagent les 10 sommets restant en groupes d'effectifs 5 et 5

Pour choisir une diagonale de la première catégorie, il suffit de choisir le sommet (bleu) unique. Il y a donc 12 diagonales dans cette catégorie.

Pour choisir une diagonale de la deuxième catégorie, il suffit de choisir deux sommets (bleus) consécutifs.
Il y a donc 12 diagonales dans cette catégorie, car les sommets peuvent être choisis en tournant autour du polygone : AB, BC, CD... jusqu'à LA.

Il y a également 12 diagonales dans la troisième catégorie correspondant aux 12 triplets de points, de ABC à LAB.
Il y a également 12 diagonales dans la quatrième catégorie.

Seule la dernière catégorie pose problème : il y a 12 façons de choisir 5 points consécutifs, de ABCDE à LABCD, mais une même diagonale correspond à deux de ces choix, par exemple, la diagonale [AG] correspond aux points consécutifs BCDEF, mais aussi à HIJKL. Il n'y a donc que 6 diagonales dans cette catégorie, et le nombre de diagonales du polygone est 4 x 12 + 6 = 54.

Et si, au lieu d'utiliser ou d'adapter le principe de partition, on l'abandonnait complètement ?

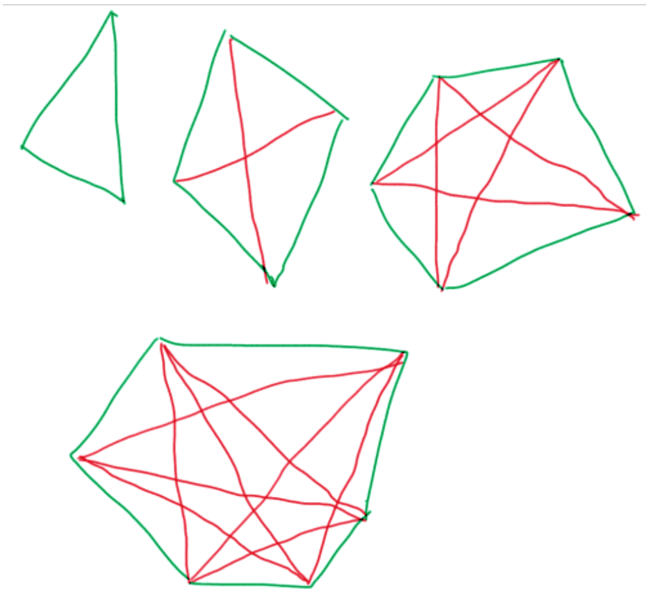
Une idée souvent fructueuse en mathématique quand un problème résiste consiste à s'attaquer d'abord à un problème du même type, mais plus simple.

Dans le cas des diagonales du polygone, on peut voir ce qu'il en est pour des triangles, des quadrilatères, des pentagones… avec l'espoir de trouver une règle qu'on pourra appliquer au polygone ayant 12 sommets.

Ce travail préparatoire peut aboutir de différentes manières :

Il se peut que la réalisation des dessins suffise à faire remarquer qu'on a une diagonale par sommet pour un quadrilatère, deux diagonales par sommet pour un pentagone, puis trois diagonales par sommet.

Cette remarque conduit à une solution proche de celle proposée ci-dessus.



Il se peut aussi qu'on ne remarque rien à l'occasion du dessin et qu'on soit conduit à observer le tableau qui regroupe les résultats obtenus.

Nombre de sommets	3	4	5	6
Nombre de diagonales	0	2	5	9

On peut chercher à y voir une règle de deux types :

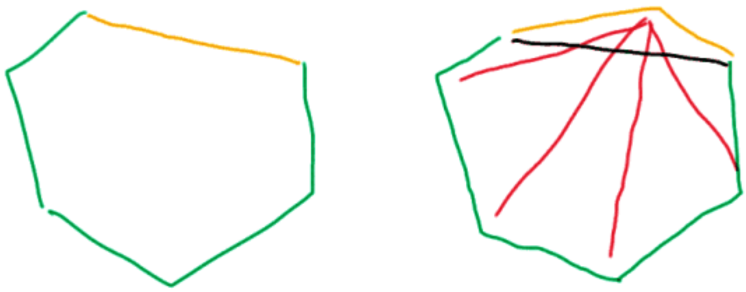
- Une règle qui permettrait de calculer directement le nombre de diagonales à partir du nombre de sommets.
- Une règle qui permettrait de compléter le tableau vers la droite étape par étape en calculant le nombre de diagonales d'un polygone à partir du nombre de diagonales du polygone ayant un sommet de moins.

La première règle ne saute pas aux yeux. En revanche on voit assez facilement que si on se déplace de gauche à droite dans la ligne du bas du tableau, on ajoute 2 puis 3 puis 4.

Plus précisément, quand on passe de 3 sommets à 4 on ajoute deux diagonales, de 4 sommets à 5 on ajoute 3 diagonales, de 5 sommets à 6 on ajoute 4 diagonales...

Il s'agit maintenant de savoir si ce que nous venons d'observer est une coïncidence, ou s'il s'agit d'une propriété généralisable.

transformons un polygone à 6 côtés en un polygone à 7 côtés en remplaçant le côté jaune par deux côtés :



On a ajouté les diagonales rouges, joignant le nouveau sommet à tous les anciens (sauf ses deux voisins). Il y en a donc 6-2, c'est à dire 4

De plus, le côté supprimé est devenu une diagonale (en noir sur le schéma).

Le nombre de diagonales créées est donc égal à 6 - 2 + 1 = 5

De même, si on rajoute un sommet à un polygone qui en a n, on crée n-2 diagonales rouges (joignant le nouveau sommet à tous les anciens (sauf ses voisins), et une noire (l'ancien côté).
Le nombre de nouvelles diagonales est donc égal à n - 2 + 1 = n - 1.

La remarque faite plus haut n'est donc pas une coïncidence, il s'agit d'une propriété générale qu'on peut utiliser pour compléter le tableau de proche en proche.

Nombre de sommets	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Nombre de diagonales	**0**	**2**	**5**	**9**	**14**	**20**	**27**	**35**	**44**	**54**

Le polygone à 12 sommets possède donc 54 diagonales.

Si nous cherchions le nombre de diagonales d'un polygone ayant un très grand nombre de sommets, compléter ainsi de proche en proche ne serait pas très commode.

Maintenant que nous disposons d'un tableau un peu plus étoffé, peut-être pouvons-nous y découvrir une règle permettant de calculer directement le nombre de diagonales à partir du nombre de sommets.

On peut remarquer que le nombre de diagonales est parfois un multiple du nombre de sommets. Quand ce n'est pas le cas, il suffirait de doubler le nombre de diagonales pour obtenir un multiple du nombre de sommets.
En poursuivant ces observations, on peut finir par remarquer que le nombre de diagonales (D) s'obtient toujours à partir du nombre de sommets (S) par la formule suivante : D = S (S - 3) / 2

Il resterait à prouver que cette formule est toujours vraie, ce qui ne serait pas difficile, car elle ne fait que décrire, en la généralisant, la toute première méthode utilisée pour calculer le nombre de diagonales du polygone à 12 sommets :

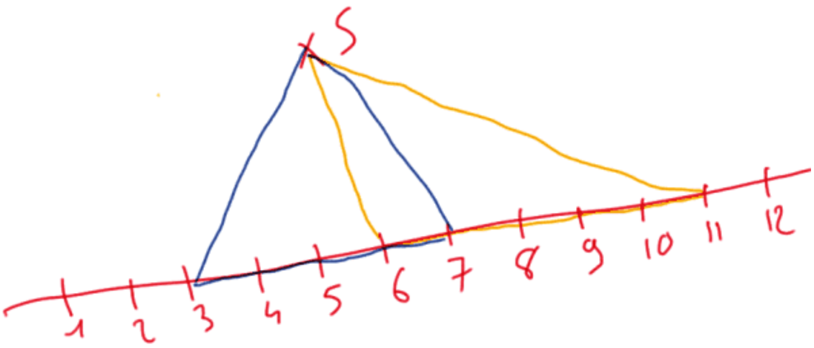
Si S est le nombre de sommets, S - 3 est le nombre de diagonales issues d'un même sommet. S (S - 3) est donc le double du nombre de diagonales puisque chacune est comptée 2 fois.

Le nombre de diagonales est alors D = S (S - 3) / 2

Problèmes voisins

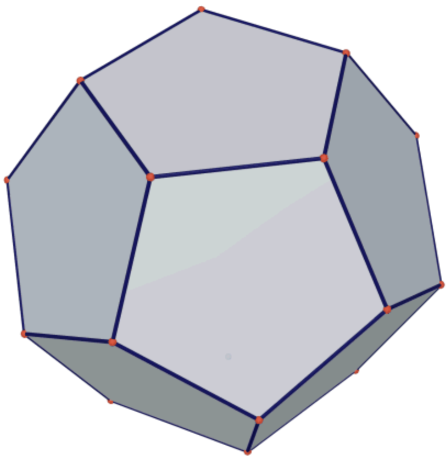
Si vous avez compris les diverses solutions de ce problème, vous devriez pouvoir résoudre les problèmes suivants :

On considère 12 points alignés et un point S situé hors de la droite qui porte les 12 autres points.



Combien peut-on tracer de triangles ayant pour sommets le point S et deux des 12 points alignés ? Les triangles bleu et orange de l'illustration sont deux exemples des triangles à dénombrer.

Le solide ci-contre est un dodécaèdre régulier : il a 12 faces qui sont toutes des pentagones réguliers.



- Combien a-t-il de sommets ?
- Combien a-t-il de diagonales ? (une diagonale du polyèdre est un segment qui joint deux sommets, mais qui n'est pas une arête et n'est pas situé sur une face).

Solutions succinctes des problèmes précédents

Nous ne donnons qu'une réponse à chaque question, d'autres approches peuvent être correctes également.

Problème des triangles

Chaque triangle comporte un côté dont les sommets sont deux des 12 points alignés.

Le nombre de triangles est donc égal au nombre de segments qu'on peut tracer en utilisant ces 12 points.

Pour chaque point, on peut tracer 11 segments (on peut utiliser n'importe lequel des autres points comme deuxième extrémité).

En traçant tous les segments possibles à partir de chaque point, chaque segment sera tracé deux fois. Par exemple le segment joignant 3 à 5 sera tracé en partant de 3 et en partant de 5.

Il existe donc $\frac{12 \times 11}{2}$ soit 66 segments et également 66 triangles.

Problème du dodécaèdre

Les 12 faces ont chacune 5 sommets. Il y aurait donc 60 sommets si on ne tenait pas compte du fait que chaque sommet appartient à trois faces différentes.

Le dodécaèdre a donc en réalité 20 sommets.

On peut utiliser l'illustration pour constater que, pour un sommet donné, il existe 9 autres sommets qui appartiennent à une même face que lui.

À partir de chaque sommet, on peut donc tracer 10 diagonales.

Le nombre de diagonales du dodécaèdre est donc égal à $\frac{20 \times 10}{2}$ soit 100.