Autour du cercle

Les intentions qui fondent les situations proposées

S'entrainer à manipuler l'objet compas.
Plus tard dans la scolarité, le compas est utilisé pour des constructions qui ne sont en réalité que des prétextes à raisonnement. Quand ils en seront là, les élèves déjà familiers avec le compas et le manipulant aisément pourront consacrer leur attention aux raisonnements, objet réel du travail.
Si au contraire la manipulation est encore difficile, elle risque de masquer l'enjeu mathématique.

Se familiariser avec quelques configurations
Par exemple le fait qu'en traçant deux diamètres d'un même cercle, on peut tracer facilement un rectangle.

Comprendre et retenir une propriété du cercle : *tous les points du cercle sont à la même distance du centre*.
Le plus difficile nous semble de trouver une formulation compréhensible par des élèves de cycle 2 (celle que nous venons d'utiliser ne l'est pas). Quand les élèves ont compris ce que signifie la propriété, il n'est pas très difficile de les convaincre que c'est vrai.

Le vocabulaire spécifique de la géométrie

Pour ne pas allonger démesurément ce document, nous y utilisons parfois le vocabulaire de la géométrie sans prendre les précautions qui seraient nécessaires en classe.

Nous écrivons par exemple :

> *Tracer un cercle qui a pour centre le point d'intersection des deux droites.*

En classe de cycle 2, on exprimera plutôt la même consigne en plusieurs étapes :

> *Nous allons maintenant tracer un cercle.*
> *Attention, il ne faut pas placer la pointe du compas n'importe où, il faut la placer là où les deux droites se coupent. Le centre du cercle doit être au point où les droites se coupent, à l'intersection des droites.*

Aussi longtemps que nécessaire, l'enseignant utilise des formulations doubles : le terme technique et son explication. C'est très progressivement que les termes techniques prennent leur autonomie et sont employés sans étayage.

Quelques indications sur le choix du compas

Un bon compas pour le cycle 2 devrait répondre aux critères suivants :

- La pointe est fine, mais très courte, elle se plante facilement dans le papier, mais ne risque pas de provoquer de blessure plus grave qu'une éraflure.

- Un anneau maintient le crayon, ce qui permet de changer de couleur.
  Le crayon doit être maintenu fermement dans l'anneau et ne pas bouger.
  Fixer et enlever le crayon dans l'anneau doit être facile.

- L'articulation des deux branches du compas ne doit pas être trop ferme, car les élèves doivent pouvoir facilement régler leur compas à l'écartement désiré.
  Elle ne doit pas non plus être trop lâche, pour que l'écartement ne varie pas pendant le tracé du cercle.
  On trouvait il y a quelques années des compas comportant une grosse molette permettant de serrer plus ou moins l'articulation.
  Dans les modèles les plus courants actuellement, comme celui figurant sur la photo, le serrage des deux branches s'effectue à l'aide d'un tournevis, les élèves sont donc moins autonomes. La molette de serrage du crayon gagnerait également à être plus grosse pour un maniement facile par des enfants jeunes.

Tracer des cercles

S’entrainer librement à tracer de beaux cercles.

Pour certains élèves, réussir à dessiner quelques cercles corrects peut prendre du temps, car les difficultés de manipulation sont importantes :
Il faut appuyer suffisamment pour que le crayon laisse une trace nette, mais pas trop. Si on appuie trop, on risque de modifier l’écartement du compas, de sortir la pointe de son trou, d’élargir le trou…
La coordination des deux mains et la façon de tenir le compas varient d’un utilisateur confirmé à l’autre, il est donc difficile d’être assuré de la pertinence d’un conseil. Voici tout de même quelques suggestions qui, nous semble-t-il, peuvent cependant rendre la tâche plus simple :

Pour que ce soit moins difficile, on peut essayer les choses suivantes :

- Tracer une petite croix et planter le compas en son centre… c’est plus facile ensuite de retrouver le centre si on le perd.
- Coller une gommette ou un morceau d’adhésif là où on placera la pointe du compas… on risque moins de déplacer la pointe ou d’abimer le papier.
- Fixer la feuille sur laquelle on travaille sur un grand carton pour qu’elle bouge moins (et qu’on n’abime pas la table avec la pointe).
- Tenir le compas par le haut, à l’articulation.
- Essayer de changer la main qui tient le compas
- Tracer seulement un morceau du cercle et compléter ensuite : si on ne change ni le centre ni l’écartement, les morceaux se complètent bien pour faire un cercle entier.

Il n’est pas nécessaire d’attendre que tous les élèves réalisent des tracés parfaits pour passer à la suite. Les tracés continueront à s’affiner à travers les autres situations.

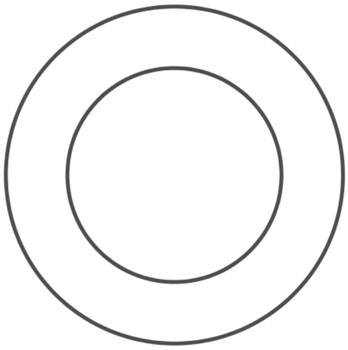
Proposition de trace écrite pour cette étape :

Pour tracer un cercle, il ne faut pas bouger la pointe du compas, ni changer l’écartement.

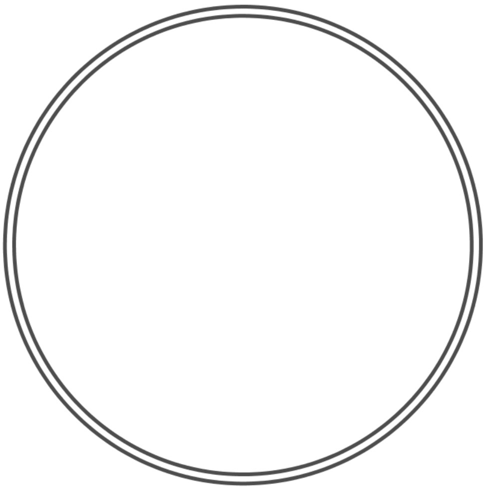
Des cercles qui ont le même centre.

Voici quelques constats à faire en traçant plusieurs cercles ayant le même centre.

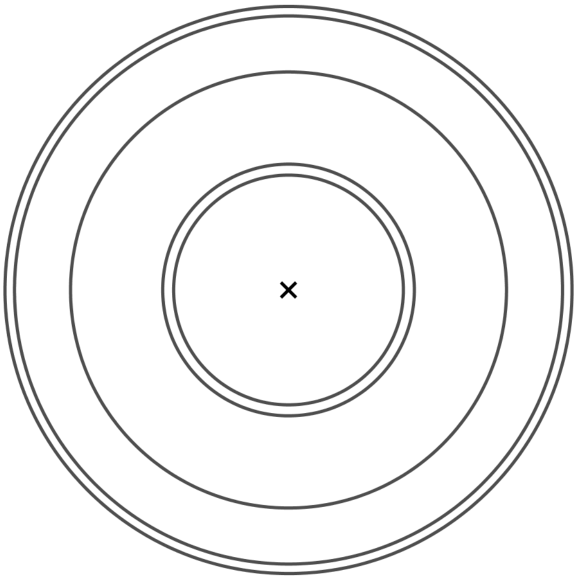
Si on trace deux cercles avec le même centre, ils ne se coupent pas.



Même si les deux cercles sont très près l'un de l'autre, ils ne se coupent pas.



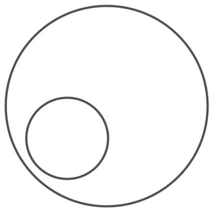
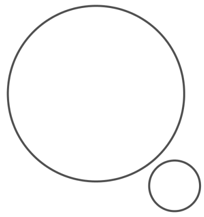
On peut tracer beaucoup de cercles les uns dans les autres, avec le même centre.



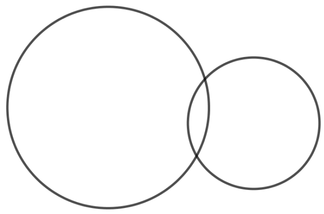
Deux cercles qui n’ont pas le même centre

Les élèves cherchent à faire des figures aussi différentes que possible. On devrait assez rapidement obtenir les deux cas suivants :

Les deux cercles ne se touchent pas.

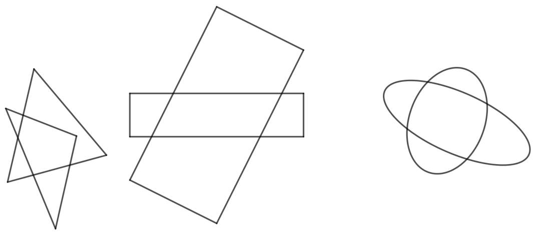
Comme ça :  ou comme ça : 

Les deux cercles se coupent.



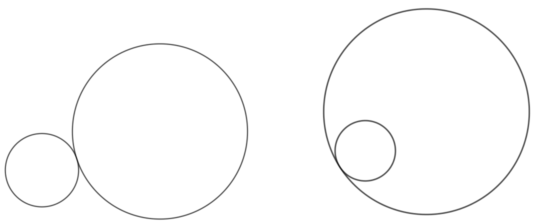
Quand deux cercles se coupent, c’est toujours en deux points.
C’est impossible de dessiner deux cercles qui se coupent en plus de deux points

Avec beaucoup d’autres figures (deux triangles, deux rectangles, deux figures arrondies (mais qui ne sont pas des cercles), on peut avoir quatre points d’intersection, peut-être même plus.



Si le cas suivant n’est pas envisagé par les élèves, l’enseignant ne l’évoquera pas.
Si des élèves y songent, voici ce qu’on peut en dire.

Il y a aussi des dispositions bizarres où les cercles se touchent sans se couper.



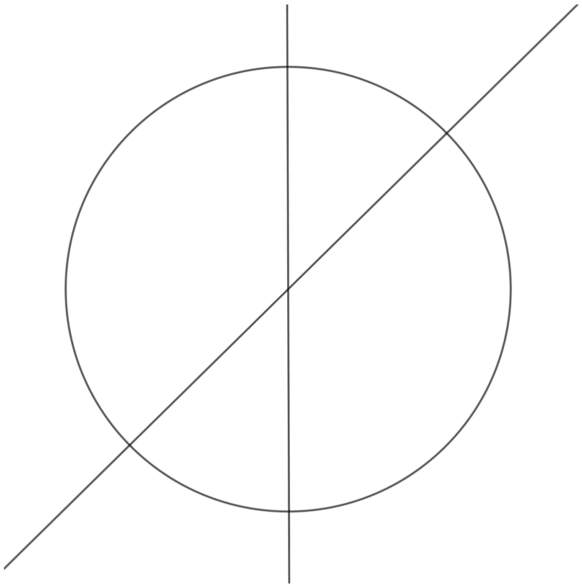
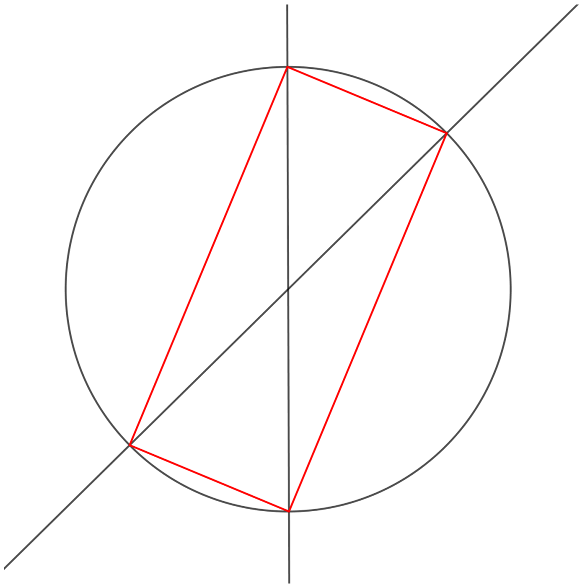
Les mathématiciens appellent ça des cercles tangents.

Voici comment s’y prendre pour tracer des cercles tangents :
tracer trois points alignés et leur donner des noms : A, B et C,
tracer le cercle qui a pour centre le point A et qui passe par le point B,
tracer le cercle qui a pour centre le point C et qui passe par le point B.

Des figures tracées en utilisant des cercles

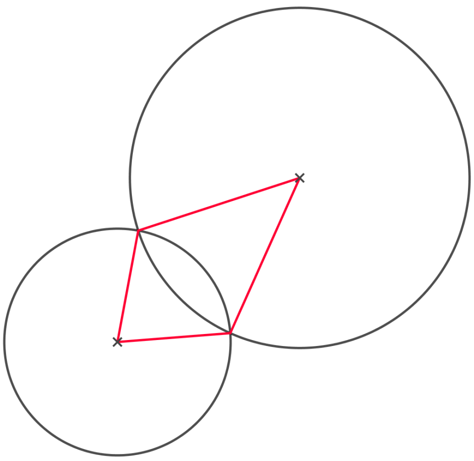
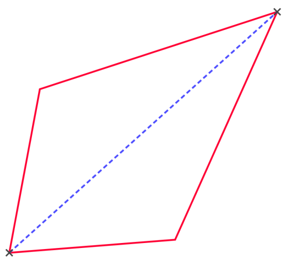
Un rectangle vite tracé.

Tracer deux droites qui se coupent.
Tracer un cercle qui a pour centre le point d'intersection des deux droites.
Le cercle coupe les droites en quatre points (deux points pour chaque droite)
En joignant ces quatre points, on peut dessiner un rectangle.

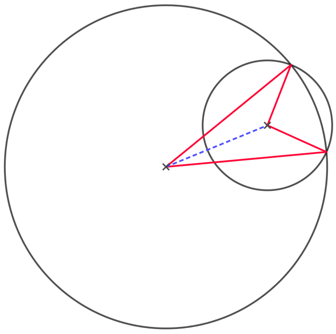



Un quadrilatère symétrique.

En traçant deux cercles qui se coupent, on place sur la feuille quatre points intéressants : les deux cercles et les deux points d'intersection (les points où les cercles se coupent).
En joignant ces points, on peut tracer un quadrilatère.
Si on découpe ce quadrilatère, on peut le plier en deux parties qui se recouvrent exactement : il est symétrique. La ligne tracée en pointillé sur la figure est l'axe de symétrie.

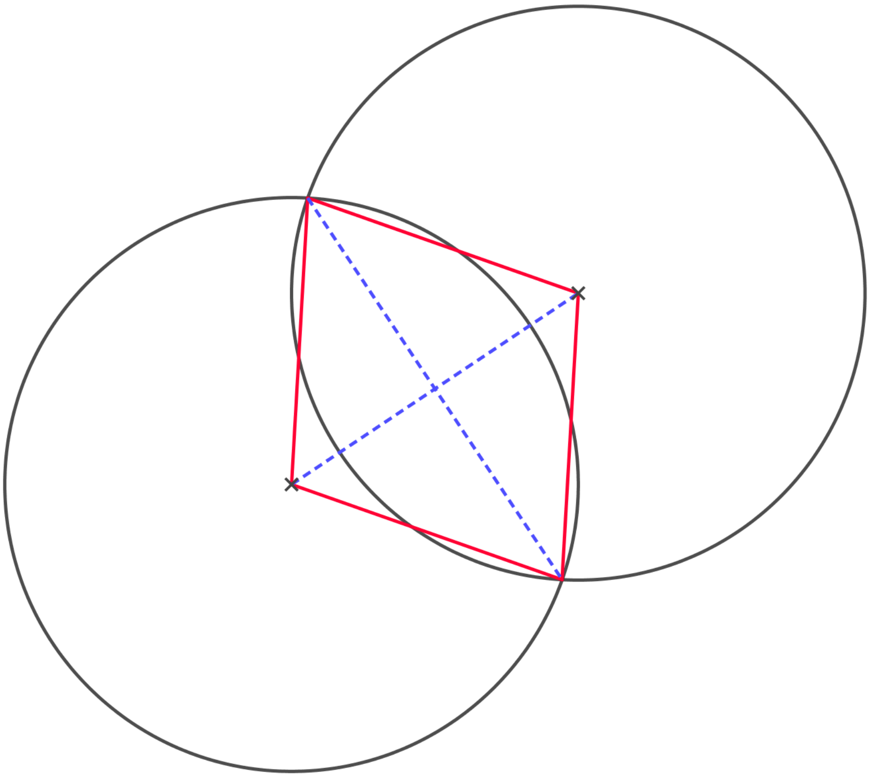



En choisissant bien les cercles, on peut obtenir un quadrilatère symétrique et concave.



Un quadrilatère symétrique de deux façons

Recommençons le même travail avec deux cercles qui ont le même rayon (le même écartement de compas),
On peut plier ce quadrilatère pour que les deux parties se superposent de deux façons : il a deux axes de symétrie.
Les quatre côtés du quadrilatère qu'on obtient ont la même longueur, pourtant ce quadrilatère n'est pas un carré (en réalité, si vous avez énormément de chance vous pouvez avoir dessiné un carré, mais la plupart du temps ce n'est pas le cas).

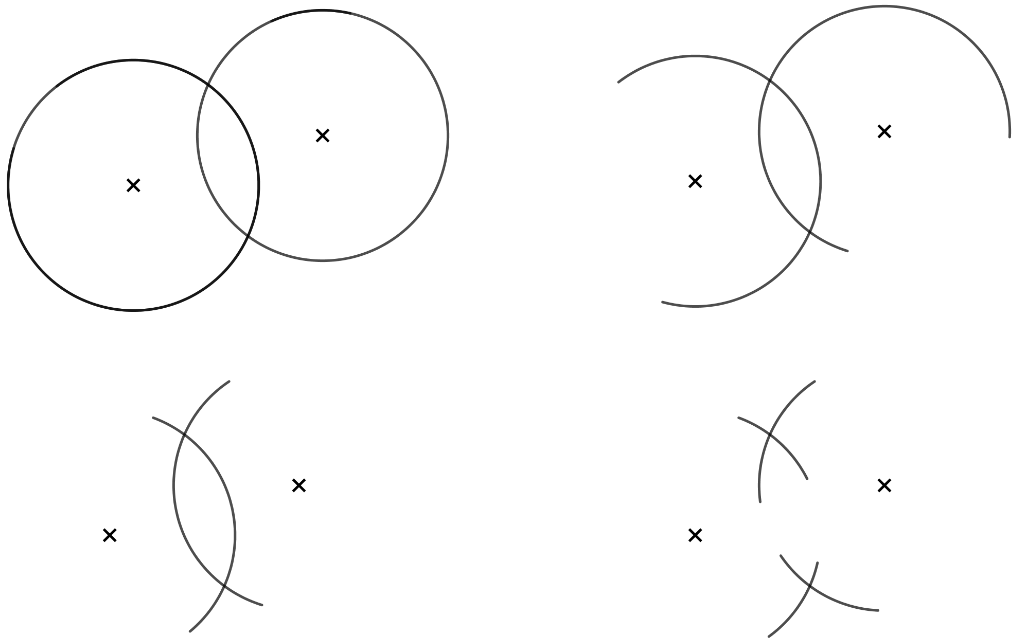


Avec deux cercles de même rayon, ce n'est pas possible d'obtenir un quadrilatère concave.

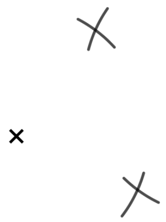
Comment tracer beaucoup de points alignés sans utiliser de règle.

Pour ce travail, on tracera toujours les cercles deux par deux : deux cercles qui se coupent et qui ont le même rayon.
À la fin du travail, il y aura beaucoup de cercles. Pour que le dessin ne soit pas trop embrouillé, il est préférable de commencer par s’entrainer à faire ce qui est décrit dans l’encadré suivant.

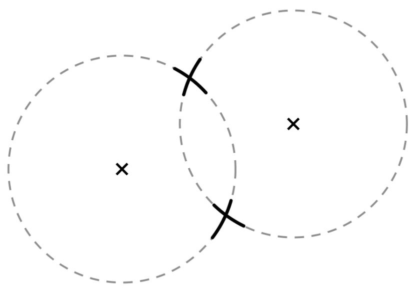
Pour que ce ne soit pas trop embrouillé, on essaie de ne pas dessiner les cercles entiers, mais seulement les parties qui nous intéressent : là où les cercles se coupent.



Avec de l’entrainement, on peut dessiner des figures qui ressemblent à celle qui suit.
On voit bien les centres des deux cercles et les points d’intersection, mais la plus grande partie des cercles a disparu, on peut seulement l’imaginer.



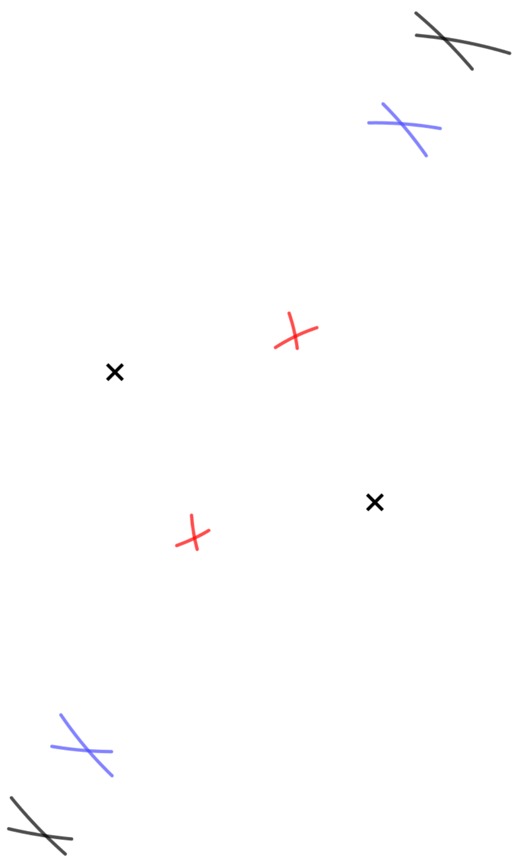
Cette figure montre les cercles qu’on imagine.
Les élèves n’ont pas à la tracer, mais l’enseignant peut la montrer



Quand on est capable de tracer les intersections de deux cercles à l'aide de petites parties des cercles comme ci-dessus, on peut poursuivre.

Pour la figure qui suit, on utilise des cercles deux par deux :

- On dessine les intersections de deux cercles de même rayon comme ci-dessus.
- On change ensuite l'écartement du compas, mais **on conserve les mêmes centres** et on trace les intersections de deux nouveaux cercles.
- On change à nouveau l'écartement du compas, mais on conserve les mêmes centres et on trace les intersections de deux nouveaux cercles…



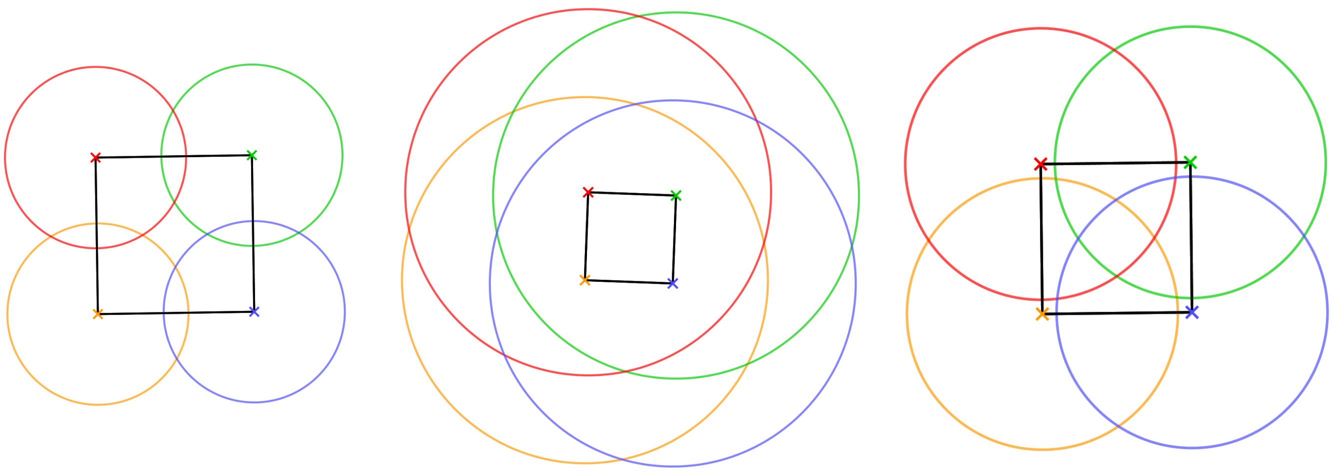
On peut vérifier avec une règle que tous les points d'intersection qu'on trace ainsi sont alignés : il y a une droite qui passe par tous ces points.

Avec un carré et des cercles

Pour ce travail, on commence par tracer un carré en suivant les lignes d'une feuille quadrillée. Ensuite, on ne se sert plus du quadrillage.
On peut aussi partir d'un carré distribué par le maitre.

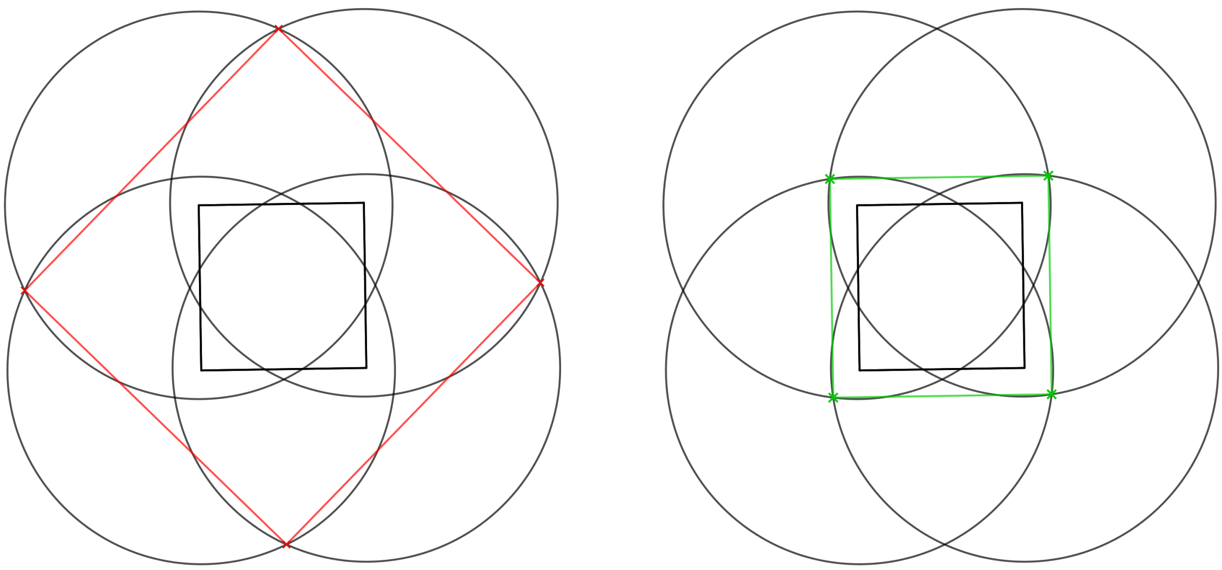
On trace quatre cercles en respectant les consignes suivantes :

Les quatre cercles ont le même rayon (le même écartement du compas).
Chaque cercle a pour centre un sommet du carré.
Les cercles sont assez grands pour se couper.



On observe ensuite les points où les cercles se coupent, les points d'intersection.

En joignant certains points d'intersection bien choisis, on peut tracer de nouveaux carrés.



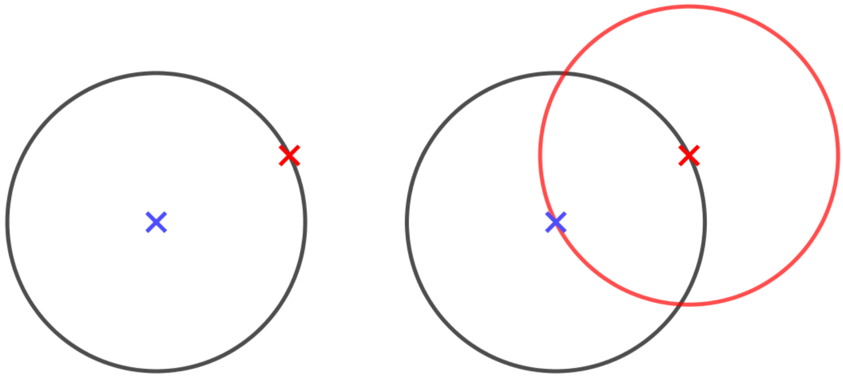
En choisissant d'autres intersections des cercles, on peut tracer d'autres figures intéressantes.

Yves Thomas

Une belle figure

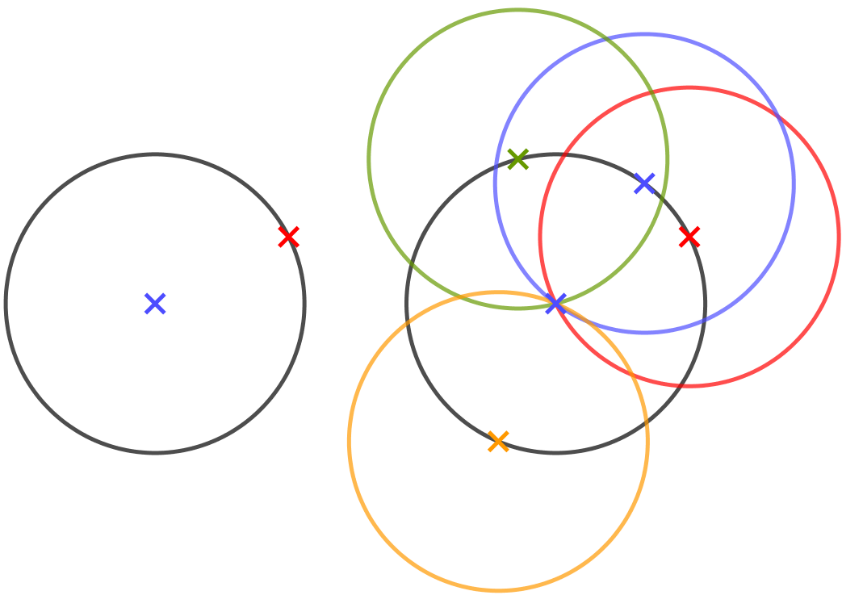
Dans ce travail, **on ne change jamais l'écartement du compas.**
Les cercles ont tous le même rayon.

On trace un cercle puis on choisit un point sur le cercle.
En utilisant ce point comme centre, on trace un deuxième cercle.
Ce nouveau cercle passe par le centre du premier cercle.



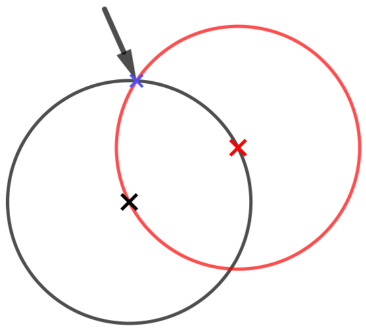
On choisit un autre point sur le premier cercle.
En utilisant ce point comme centre, on trace un troisième cercle.
Ce nouveau cercle passe lui aussi par le centre du premier cercle.

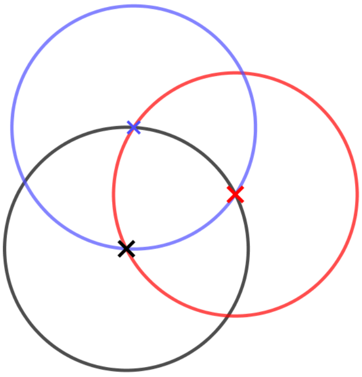
On peut continuer autant de fois qu'on le veut.



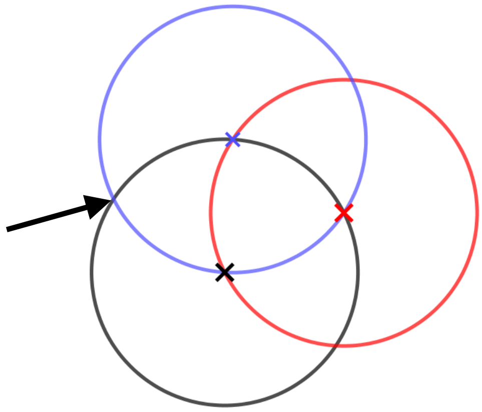
Le dessin est plus intéressant si , à partir du troisième cercle, on choisit bien la place des centres.

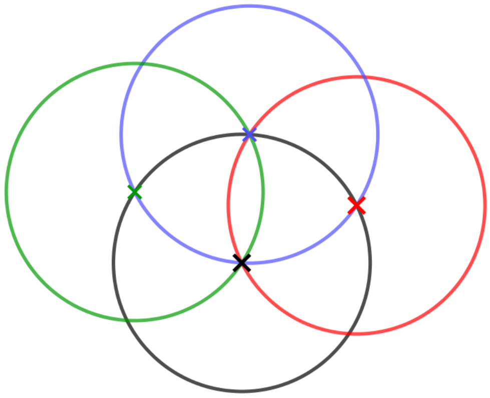
On place le centre du troisième cercle sur le premier cercle, mais pas n'importe où :
on choisit un point où les deux premiers cercles se coupent.



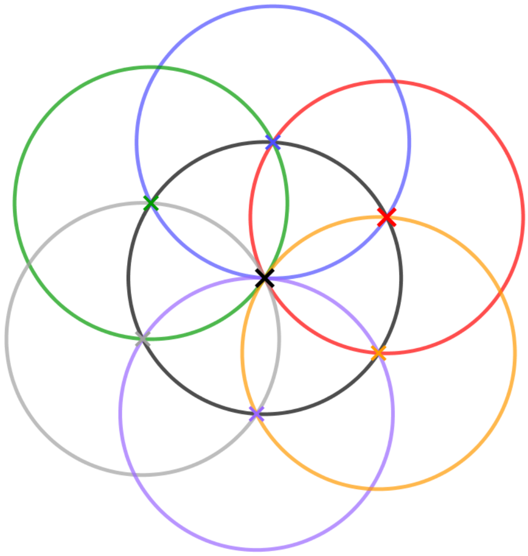


On place le centre du quatrième cercle sur le premier cercle, mais pas n'importe où :
on choisit un point où le premier cercle coupe un autre cercle.

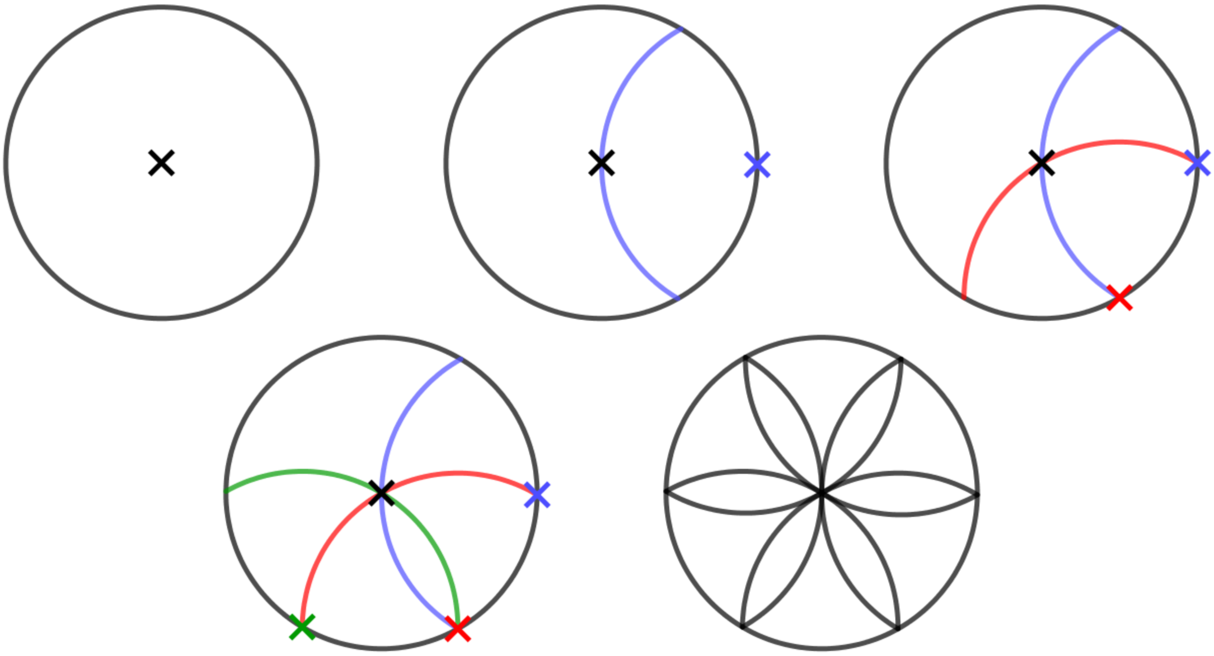




En continuant ainsi, on peut tracer six cercles autour du premier.
Quand ils sont tracés, on ne peut pas continuer : tous les cercles qu'on peut tracer de cette façon sont déjà tracés.



Si, à partir du deuxième cercle, on dessine seulement la partie qui est à l’intérieur du premier cercle, on obtient une rosace.



Plier un cercle

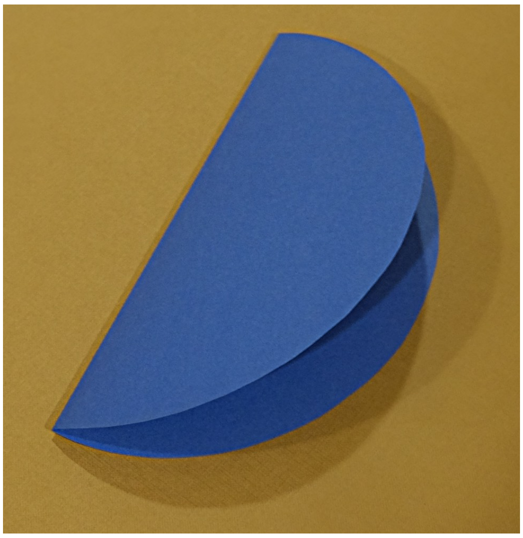
Pour cette situation, on utilise de préférence des disques en papier vendus pour l'origami ou pour fabriquer des décorations.
Le cercle qui nous intéresse n'est pas un trait dessiné : c'est le bord du papier.

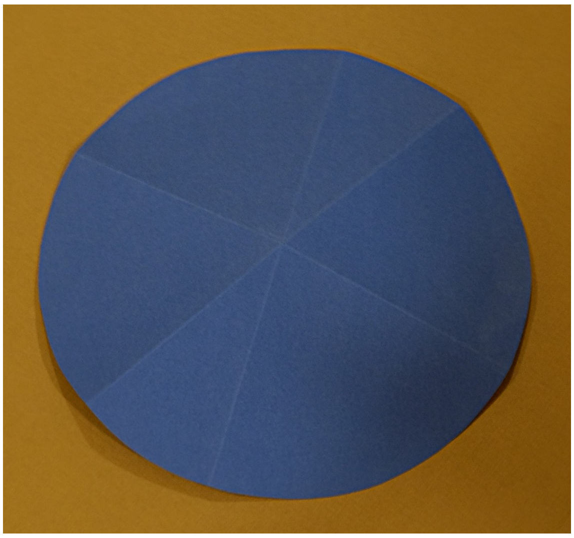
Voici quelques constats que l'on peut faire :

On peut plier le cercle en deux parties qui se superposent exactement.

On peut plier de beaucoup de façons différentes.
Le cercle a beaucoup d'axes de symétrie

Tous les plis (les axes de symétrie) se coupent en un même point.
Ce point est le centre du cercle.





Ce n'est pas facile de tracer le cercle pour vérifier parce que c'est juste le bord du papier, mais on peut tracer un cercle un tout petit peu plus petit, très près du bord du papier.

Cercle et disque, la distinction est-elle nécessaire ?

Pour un carré ou un rectangle, une telle distinction n'existe pas. On parle aussi bien de l'aire d'un carré (considéré alors comme une surface) ou de son périmètre (le carré est alors une ligne)… et cela ne pose pas de problème particulier. Dans les cas ambigus, on précise par exemple : « placer un point à l'intérieur du carré ».
En cycle 2, on ne fera donc la distinction cercle/disque que si l'on est à peu près certain de ne pas mettre en difficulté inutilement quelques élèves.
Si on introduit cette distinction, il est commode de faire le rapprochement avec l'usage courant des mots « disque » et « cerceau » (phonétiquement proche de « cercle »).

Comparer des distances en utilisant des cercles

Tous les points du cercle sont à la même distance du centre.

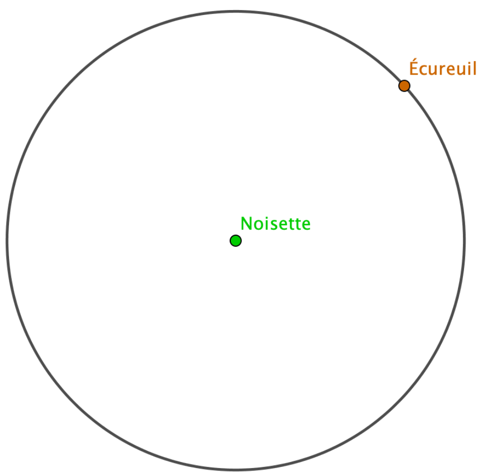
Quand cette phrase est comprise, il n'est pas très difficile de se convaincre qu'elle est vraie (par exemple en évoquant le fait que le réglage du compas n'est pas modifié pendant qu'on trace le cercle, l'écart entre la pointe et le crayon ne change pas).
En revanche, faire comprendre le sens de la phrase est difficile.

Nous nous appuyons pour cela sur une petite histoire d'écureuils.
Il est très rare que nous nous utilisions des prétextes extramathématiques : aborder directement la question mathématique que l'on vise, sans habillage (qui risque de détourner l'attention de la question étudiée), nous semble en général préférable. C'est donc par défaut que nous utilisons cette petite histoire, parce que nous n'avons pas trouvé de formulation purement mathématique suffisamment simple.

En revanche, le choix d'introduire ce travail portant sur l'égalité de distances par des inégalités est délibéré. Il est parfois facile de juger « à l'œil » laquelle de deux distances est la plus grande, mais il n'est jamais facile de conclure que deux distances sont égales.

Le tracé au tableau à l'aide d'un compas des schémas qui suivent est préférable, même s'il est moins précis, à l'usage d'un tableau interactif, car c'est le déplacement du compas sans en modifier l'écartement qui sera en fin de travail utilisé pour justifier l'égalité des distances.

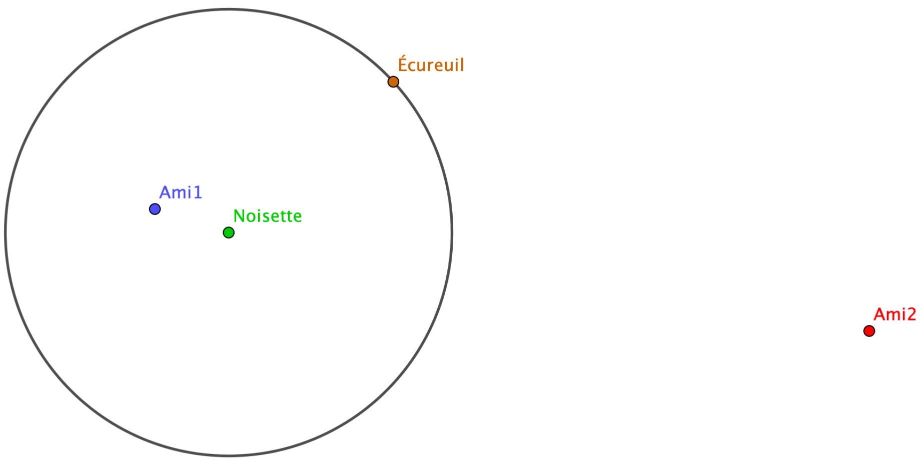
L'enseignant dessine ce schéma au tableau.
La noisette est au centre du cercle, l'écureuil est sur le cercle.



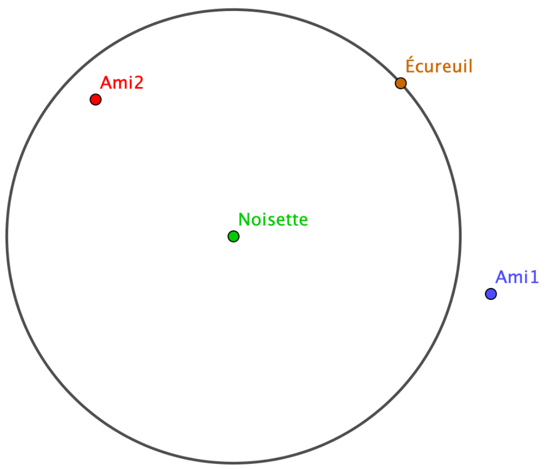
L'écureuil a dessiné un grand cercle et posé une noisette au centre du cercle.

On voit ici la noisette le cercle et l'écureuil sur un plan. Ça veut dire qu'on les voit comme si on était un oiseau qui vole très haut et qui regarde ce qui se passe en dessous.

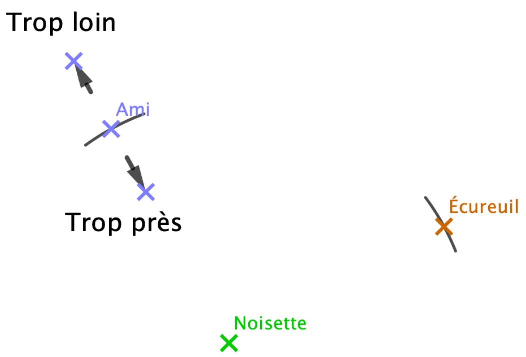
L'écureuil invite ses amis écureuils pour un jeu.
Au signal, tout le monde courra vers la noisette, le premier arrivé pourra la manger.
L'écureuil s'est placé sur le cercle et il attend ses amis.



Les deux premiers amis sont arrivés. S'ils se placent comme sur le plan, est-ce que je jeu sera intéressant ?
… pas vraiment parce que l'ami 1 est trop près de la noisette, l'ami 2 est trop loin. Pour que le jeu soit intéressant, il ne faut pas que certains joueurs soient trop près de la noisette et d'autres trop loin, il faut qu'ils soient tous à la même distance de la noisette.



Maintenant, c'est mieux, mais il y a peut-être quand même un écureuil qui est trop près de la noisette, ou un écureuil qui est trop loin… comment le savoir ?

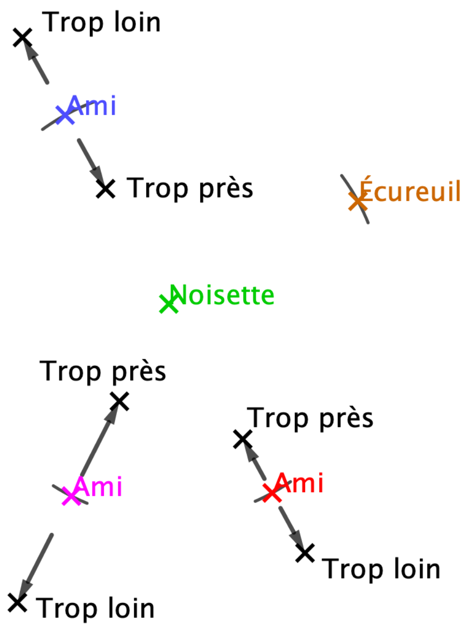


Pour répondre à cette question, l'enseignant prend le compas avec lequel il a tracé le cercle et fait le schéma ci-contre.

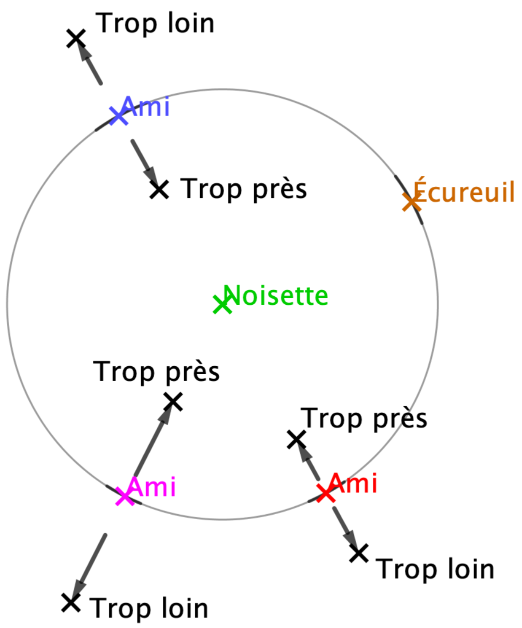
— Pour placer l'ami, j'ai gardé le même écartement que pour l'écureuil.

L'ami n'est ni trop près ni trop loin : il est à la même distance de la noisette que l'écureuil.

Ici il serait trop près, et ici il serait trop loin.



La même explication est reprise en plaçant plusieurs amis.



En traçant le cercle entier, on obtient ceci, l'enseignant peut alors envoyer des élèves au tableau placer des amis de l'écureuil :

— Peux-tu placer un ami qui est trop loin de la noisette ?

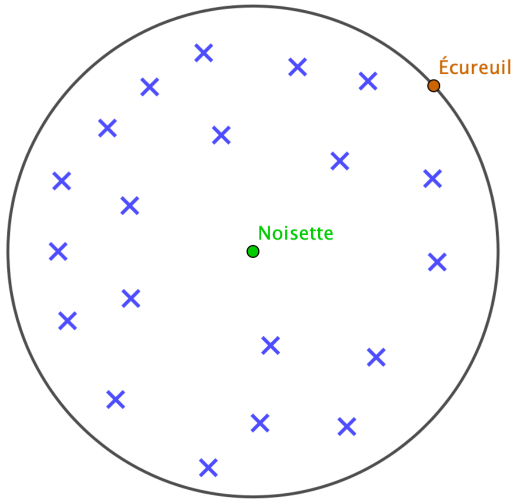
— Peux-tu placer un ami qui est trop près de la noisette ?

— Peux-tu placer un ami juste comme il faut, à la même distance de la noisette que l'écureuil ?

La conclusion peut s'exprimer à l'aide des trois schémas qui suivent :

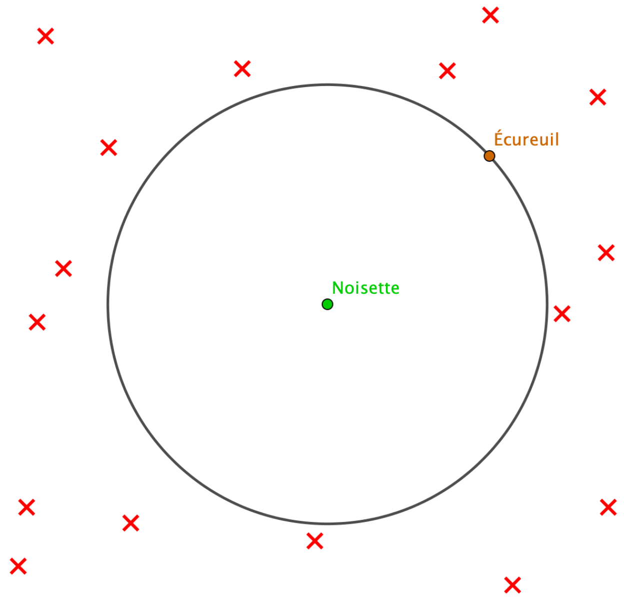
Tous les points bleus sont à l'intérieur du cercle.

Les points bleus sont plus près de la noisette que l'écureuil.



Les points rouges sont à l'extérieur du cercle.

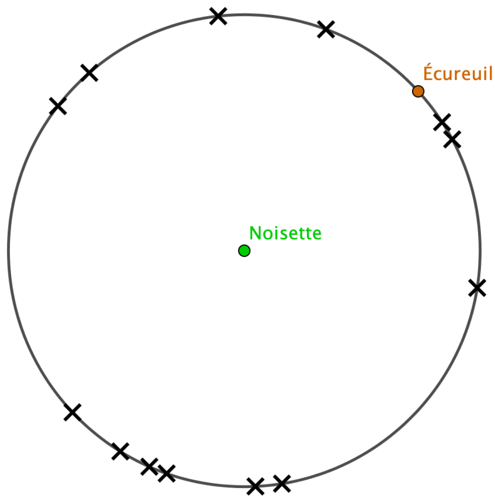
Les points rouges sont plus loin de la noisette que l'écureuil.



Les points noirs sont sur le cercle.

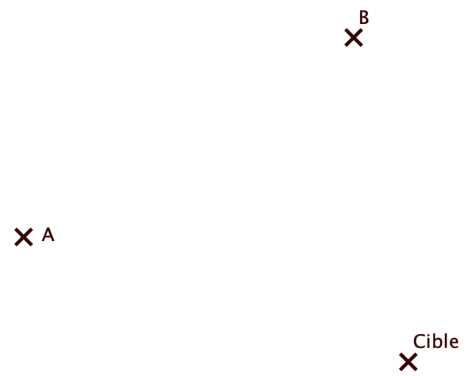
Les points noirs sont aussi loin de la noisette que l'écureuil.

Les points noirs sont à la même distance de la noisette que l'écureuil.

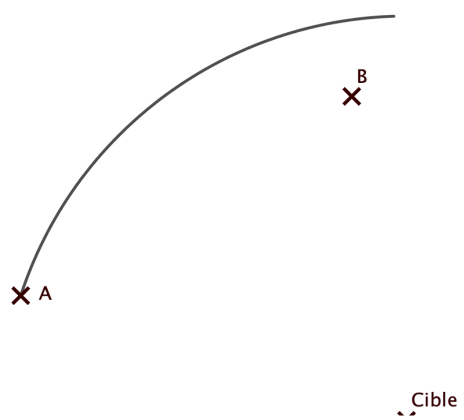


Qui est le plus près ?

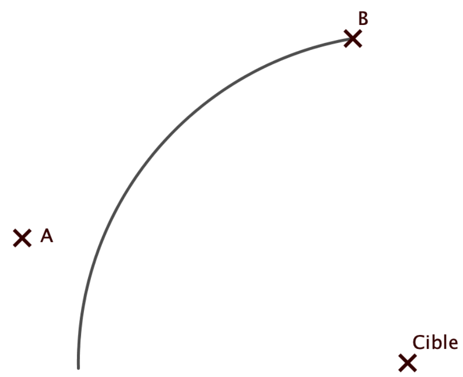
En traçant un seul cercle ou un morceau de cercle, montrer quel point est le plus près du point X, A ou B ?



On peut conclure que B qui est plus près de X que A comme ça…

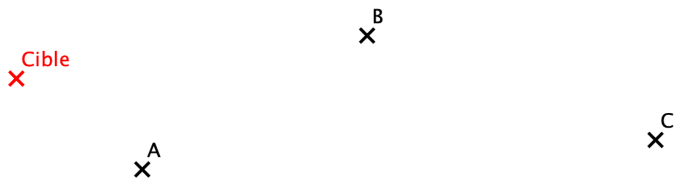


…ou comme ça.



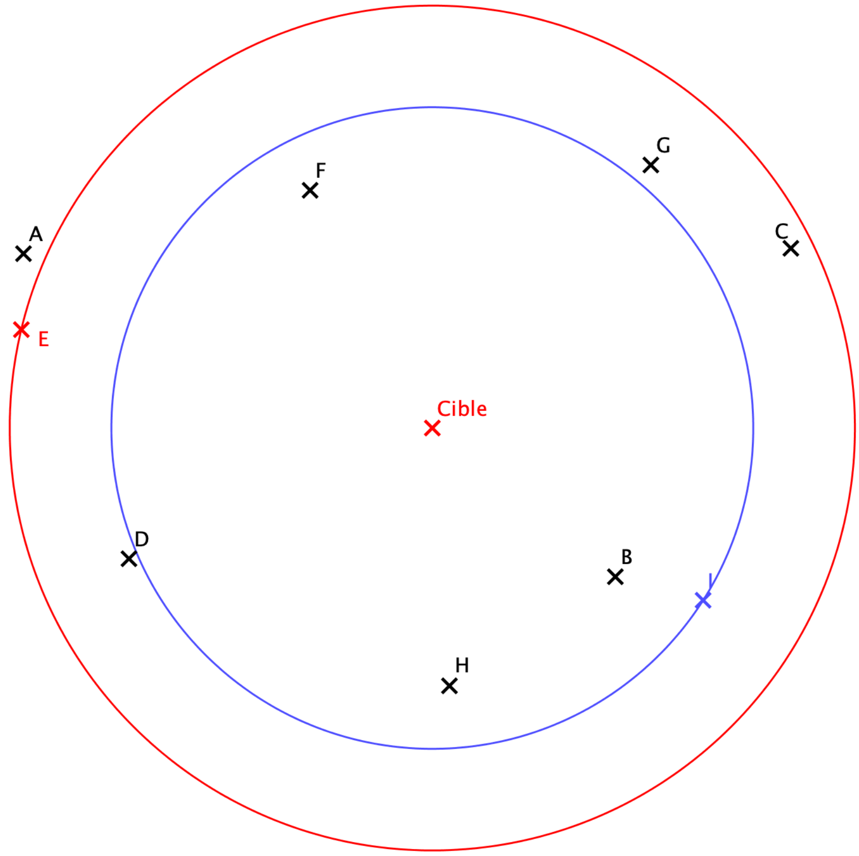
Du plus près au plus loin

Dans ce travail, il s'agit de ranger les points A, B, C… de celui qui est le plus près de la cible à celui qui est le plus loin de la cible.



Quand les points sont disposés comme ça, c'est très facile. On voit au premier coup d'œil que le plus près de la cible est A, et que le plus loin est C.
L'ordre du point le plus près au point le plus loin est A, B, C

Souvent, c'est beaucoup moins facile, mais tracer des cercles avec le point cible comme centre aide beaucoup, comme quand il n'y avait que deux points à comparer.



Avec les deux cercles qui sont tracés ici, on sait ceci :

- les trois points les plus proches de la cible sont B, F et H
- ensuite vient le point I
- les points C, D et G sont encore un peu plus loin de la cible
- le point E vient ensuite.
- Le point le plus éloigné de la cible est A.

On peut ranger les points du plus proche de la cible au plus loin en traçant un cercle qui passe par chaque point.

Souvent, on n'est pas obligé de tracer tous les cercles
Sur la figure qui suit, on peut dire que l'ordre des points, du plus proche de la cible au plus éloigné, est : B, H, F, I, D, G, C, E, A.