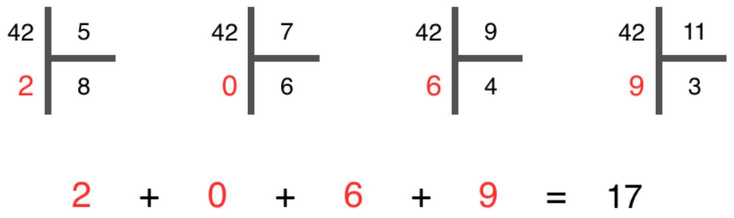
Titre

En bref

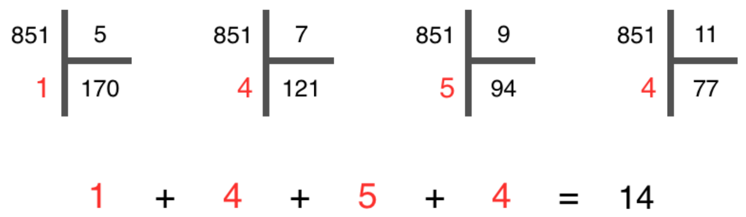
Touver un nombre entier dont la somme des restes dans les divisions par 5,7,9, 11 est maximum

Introduction du problème



— J'ai choisi un nombre entier au hasard, 42 puis j'ai posé les divisions de 42 par 5, par 7, par 9 et par 11.

Enfin, j'ai calculé la somme des restes des quatre divisions : 17



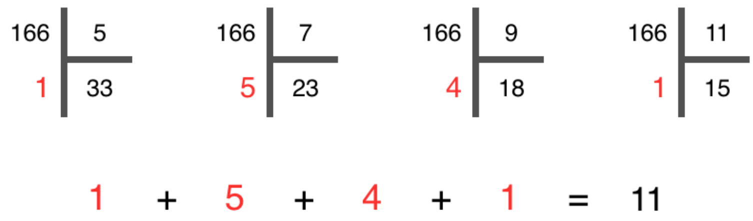
J'ai recommencé à partir d'un autre nombre : 851. Cette fois la somme des restes est 14.

Votre travail est de trouver un bon nombre de départ pour que la somme des restes soit la plus grande possible : si au lieu de 14 ou 17 vous obtenez 20 c'est mieux, 30 ce serait encore mieux, sans parler de 100 ou de 1000. . .

Pour vous expliquer plus vite le problème, je n'ai pas écrit les étapes intermédiaires des divisions, si vous avez peur que je me sois trompée, vous pouvez les vérifier.

Éléments de relance

- Attirer l'attention sur les valeurs possibles du reste de la division par 5 : dans une division par 5 le reste est plus petit que 5, il vaut au maximum 4.
- Proposer de chercher le même problème en posant seulement les divisions par 5 et 7 et en additionnant les deux restes.
- Faire remarquer qu'on n'est pas obligé de poser à chaque fois toutes les divisions. J'ai posé ces divisions :



La division par 5 peut se traduire par $166 = 33\times 5 + 1$ alors 167, 1 de plus est égal à $33\times 5 + 2$
En faisant la même chose pour les autres divisions, on voit que les restes des divisions de 167 sont 2, 6, 5, et 2, la somme est 15.

— La remarque précédente devrait assez rapidement en entrainer une autre : si un reste est maximum et qu'on ajoute 1 au nombre à diviser… le nouveau reste est 0. Cette découverte déçoit souvent les élèves : augmenter le dividende de 1 en 1 ne suffit pas à obtenir une très grande somme, car chaque reste revient à zéro périodiquement.
L'enseignante montrera qu'on peut en tirer profit : pour obtenir un reste de 6 dans la division par 7, il suffit de choisir un nombre qui a pour reste 0 et de lui soustraire 1. $700 = 7\times 100$, son reste dans la division par 7 est 0, alors le reste de la division de 699 par 7 est 6… inutile de poser cette division.'

Rapprocher la remarque précédente de celle exposée dans la rubrique « éléments de preuve » incite à chercher un nombre qui soit à la fois dans les tables de 5, 7, 9 et 11 puis à lui soustraire 1.
Nous conseillons de laisser aux élèves la responsabilité de faire ce rapprochement ce qui peut se produire très vite ou demander du temps.
De même, le fait que $5\times 7\times 9\times 11$ soit un exemple « évident » de nombre multiple à la fois de 5, 7, 9 et 11 n'est justement pas évident du tout pour un élève de cycle 3. Là encore, on laissera aux élèves le temps nécessaire pour s'en apercevoir. Dans certaines classes, le problème demeurera donc ouvert un certain temps dans le classeur de recherches même si, du point de vue de l'enseignante, la solution est très proche.
Cependant, si la conclusion ne vient pas des élèves (peut être tout simplement parce qu'ils se seront désintéressés de ce problème), l'enseignante ne laissera pas l'année se terminer sans revenir au problème pour en exposer la solution.
Pour $5\times 7\times 9\times 11$ - 1, soit 3464, chacun des restes prend la plus grande valeur possible, la somme est donc maximum, elle vaut 28.

Éléments de preuve

Dans une division euclidienne, le reste est inférieur au diviseur. Les plus grands restes possibles sont donc 4, 6, 8 et 10.

La somme des restes ne peut donc pas dépasser 28.

Quand cette explication est donnée par l'enseignante ou trouvée par un élève, on peut schématiser l'état des connaissances de la classe sur ce problème sous la forme habituelle (l'exemple ci-dessous est adapté à une classe où la plus grande somme des restes connue est 25).

Aménagements pour le cycle 2

Ce problème n'est pas adapté au cycle 2

Prolongements pour le cycle 4

Touver un nombre entier inférieur à 500 000 dont la somme des restes dans les divisions euclidiennes par 5, 7, 9, 11, 13 et 15 est maximum. La différence essentielle avec la version destinée au cycle 3 est que le produit des diviseurs ne peut pas être utilisé : il est supérieur à la limite de 500 000 fixée.