Chapitre 10

Quelques éléments sur le calcul

Un calcul ne s'exécute pas, il se médite (André Revuz).

Cette affirmation d'André Revuz guidera notre travail dans ce chapitre.
Donnons quelques exemples pour l'illustrer.

Exemple 1

On veut effectuer le calcul du nombre $A = 274 \times 27 \ + \ 153 \times 12 \ - \ 137 \times 54$.
Les conventions de priorités opératoires enseignées au collège sont très souvent interprétées ainsi : « il faut effectuer les multiplications avant les additions et les soustractions ».
Cependant, une légère transformation de l'écriture de A montre que ce n'est pas forcément une bonne idée : $A = 137 \times 2 \times 27 \ + \ 153 \times 12 \ - \ 137 \times 2 \times 27$.
Quelques instants de contemplation de cette nouvelle écriture de A devraient suffire à vous convaincre qu'effectuer les multiplications aurait été du temps perdu.

Exemple 2

Comment effectuer le calcul de $B = (1037 - 37)^2$ et celui de $C = (1000 - 1)^2$?
Les deux expressions ont la même forme, il s'agit d'élever au carré la différence de deux nombres entiers. Pourtant, il est clair que pour calculer B le plus simple est d'effectuer la soustraction $1037 - 37$ car le carré de 1000 est très facile à calculer. En revanche, si on sait développer, il semble avantageux pour calculer C d'utiliser $C = (1000 - 1)^2 = 1000^2 - 2000 + 1$.

Exemple 3

Résoudre l'équation $(2x - 6)\,(x + 7) = 0$.
Une tendance fréquente est de développer toutes les expressions algébriques que l'on rencontre (sans doute parce que le développement est une opération mécanique, toujours possible contrairement à

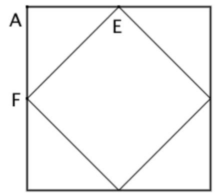
la factorisation). Pourtant, l'équation est très facile à résoudre sous la forme donnée plus haut (voir page 236). C'est beaucoup plus difficile sous la forme développée $2x^2 + 8x - 42 = 0$. Le principe de la méthode de résolution de l'équation à partir de sa forme développée consiste d'ailleurs à retrouver la forme factorisée.

Exemple 4

Terminons par un exemple empruntant à plusieurs domaines, le calcul, mais aussi la géométrie et la mesure.

Calculer l'aire d'un carré. On trace un quadrilatère en joignant les milieux des côtés d'un carré de 12 cm de côté. Après avoir montré que ce quadrilatère est lui-même un carré, on demande d'en calculer l'aire.

Presque tous les candidats commencent ainsi :



AEF est un triangle rectangle en A tel que $AE = AF = 6\,cm$, le théorème de Pythagore permet donc d'affirmer que $FE^2 = AF^2 + AE^2 = 36 + 36 = 72$.

Nous n'avons aucune objection à ce début, mais nous regrettons que presque aucun candidat ayant fait ce calcul ne s'aperçoive qu'il vient de calculer l'aire demandée.

Les règles de calcul sont de deux types :

— Certaines règles sont des conventions qui disent comment une écriture mathématique doit être interprétée. C'est le cas de celle qui dit que « $3 + 2 \times 5$ » désigne le même nombre que « $3 + (2 \times 5)$ » , et non « $(3 + 2) \times 5$ ». C'est le cas également pour l'introduction de la notation des puissances d'un nombre à l'aide d'un exposant : 7^4 désigne le nombre $7 \times 7 \times 7 \times 7$.
  Les conventions sont dans l'absolu arbitraires, mais elles sont choisies pour rendre les calculs plus faciles. Si on n'avait pas inventé la notation 7^4, certains calculs seraient extrêmement fastidieux.

— Les autres règles traduisent des faits mathématiques démontrables. Les égalités $7 \times (12 + 9) = 7 \times 12 + 7 \times 9$ ou $\frac{3}{7} \times \frac{5}{4} = \frac{3\times5}{7\times4}$ ne résultent pas d'une convention. Elles sont des exemples d'égalités plus générales : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ et $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\times c}{b\times d}$.
  On peut prouver que ces égalités sont vraies quelles que soient les valeurs numériques données à a, b et c.

Qu'elles résultent de la convention ou d'une nécessité mathématique, les règles de calcul affirment que certaines égalités sont vraies, elles ne prescrivent pas d'action. Aucune règle de calcul ne vous dira jamais ce qu'il « faut » faire.

Comme nous pensons l'avoir montré par les exemples situés au début de ce chapitre, la personne qui conduit le calcul a toujours des décisions à prendre en fonction du but qu'elle poursuit.

Étudions maintenant de plus près quelques règles de calcul importantes.

Celles qui portent sur les fractions figurent au chapitre 12 page 209.

Usage des parenthèses

Quand une expression comporte des parenthèses, elle a la même valeur que si on remplaçait toute l'expression écrite entre parenthèses par un seul nombre ayant la même valeur que cette expression.

$3 \times (150 - 50 + 3) - 4 \times 27$ est égal à $3 \times 103 - 4 \times 27$

Nous ne répéterons jamais assez qu'il n'y a aucune obligation d'effectuer les calculs écrits à l'intérieur des parenthèses. Nous espérons par exemple que cela ne vous viendrait pas à l'idée pour évaluer l'expression suivante : $\left(\frac{150}{7} - 50 + \frac{3}{11}\right) - \left(\frac{150}{7} - 50 + \frac{3}{11}\right)$.

Priorité de la multiplication

Nous avons gardé comme titre la formulation usuelle, mais nous pensons qu'elle n'est pas bonne parce qu'elle est facilement interprétée comme une prescription (exemple 1). Voici une formulation qui nous parait faciliter une meilleure interprétation des expressions mathématiques.

Dans une expression mathématique, les signes « plus » et « moins » sont des séparateurs, ils découpent l'expression en blocs. Chaque signe « plus » ou « moins » s'applique à tout le bloc situé après lui, jusqu'au prochain séparateur.

Les blocs dont il est question ci-dessus sont appelés des « termes ».

Les deux lignes qui suivent désignent la même expression :

$3 \times 5 \times \frac{3+7}{6} + 4 \times \left(1 + \frac{3}{5}\right) - 8^{\frac{5-1}{7}}$

$\left(3 \times 5 \times \frac{3+7}{6}\right) + \left(4 \times \left(1 + \frac{3}{5}\right)\right) - \left(8^{\frac{5-1}{7}}\right)$

La première ligne est peu lisible parce qu'elle est trop serrée et ne met pas en évidence la structure de l'expression en trois termes. La deuxième ligne est chargée de parenthèses inutiles.

Nous préférons cette troisième version qui met en évidence la structure de l'expression sans ajouter de parenthèses :

$3 \times 5 \times \frac{3+7}{6} \quad + \quad 4 \times \left(1 + \frac{3}{5}\right) \quad - \quad 8^{\frac{5-1}{7}}$

Cette question est beaucoup moins futile qu'il n'y parait, écrire ses calculs d'une façon claire et lisible aide grandement à calculer.

Écriture d'une puissance d'un nombre à l'aide d'un exposant

2×3^5 a la même signification que $2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$.

Pour résumer à l'aide d'un exposant l'expression $2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3$, il faut l'écrire $(2 \times 3)^5$.

L'exposant indiquant qu'un nombre est élevé à une certaine puissance ne s'applique qu'au nombre figurant immédiatement avant lui.

L'application de cette convention est parfois difficile en calcul littéral, quand les signes $\times$ sont sous-entendus.

Ainsi, il est tentant d'interpréter à tort $4x^2$ comme le carré de $4x$. En réalité, $4x^2$ désigne le produit de 4 par x^2, c'est quatre fois x^2. Le carré de $4x$ s'écrit $4x \times 4x$ ou $(4x)^2$.

Écrire $4x^2$ sous la forme $4 \times \left(x^2\right)$ éviterait le risque d'erreur d'interprétation, mais alourdirait les écritures et rendrait moins intuitive une simplification du type $3x^2 + 2x^2 = 5x^2$.

Comme il s'agit d'une convention, il n'est pas possible de la retrouver par la réflexion, il n'y a pas d'autre solution que de la mémoriser.

Suppression de parenthèses

Pour effectuer mentalement $401-103$, une méthode fréquente en calcul mental consiste à soustraire 100 puis 3, ce qui peut se traduire ainsi : $401 - 103 = 401 - 100 - 3$, ou encore :

$$401 - (100 + 3) = 401 - 100 - 3.$$

Pour effectuer mentalement $257-98$, une méthode fréquente en calcul mental consiste à soustraire 100 puis à ajouter 2, ce qui peut se traduire ainsi : $257 - 98 = 257 - 100 + 2$, ou encore :

$$257 - (100 - 2) = 257 - 100 + 2.$$

On peut généraliser ces procédés de la façon suivante :

— *Pour soustraire la somme de plusieurs nombres, on peut soustraire successivement chacun des nombres.*

— *Pour soustraire la différence de deux nombres, on peut soustraire le premier puis ajouter le deuxième.*

Les règles de suppressions de parenthèses sont des versions plus générales encore des règles précédentes.

En cherchant « suppression de parenthèse » sur un moteur de recherche bien connu, le premier site référencé propose la règle suivante : « *Si une parenthèse s'ouvre derrière un signe - , on peut enlever cette parenthèse à condition de changer tous les signes* ». Cette règle comporte tant de conditions implicites qu'elle n'est utilisable que par des personnes qui maîtrisent suffisamment le calcul pour ne pas en avoir besoin.

Passons rapidement sur le fait que les signes à changer sont uniquement les signes « + » et « - », nous avons rarement constaté d'erreur d'interprétation sur ce point.

En appliquant strictement cette règle, l'expression $150 - (20 + 50 - 20) \times 2$, qui vaut 50, serait remplacée par $150 - 20 - 50 + 20 \times 2$, laquelle vaut 120.

Cet exemple illustre une première précision nécessaire pour interpréter correctement la règle :

— Il ne suffit pas de vérifier qu'une parenthèse s'ouvre derrière le signe moins, il faut vérifier que cette parenthèse est un terme du calcul, c'est-à-dire qu'elle se ferme à la fin du calcul ou qu'elle est suivie par un « séparateur » plus ou moins. Dans notre exemple, la règle ne peut pas être utilisée, car l'expression à laquelle s'applique le signe moins est « $(20 + 50 - 20) \times 2$ » et non « $(20 + 50 - 20)$ » .

En appliquant strictement la règle, l'expression $150 - (60 - 10 + (50 - 20))$, qui vaut 70, serait remplacée par $150 - 60 + 10 - (50 + 20)$, laquelle vaut 30.

— Quels sont les signes situés à l'intérieur de la parenthèse supprimée qui doivent être changés ? Pour le savoir, il faut analyser le calcul situé à l'intérieur de la parenthèse à supprimer, et repérer les séparateurs de ce calcul partiel. Ce sont eux et seulement eux qui doivent être changés. Dans notre exemple, le signe moins situé à l'intérieur de la petite parenthèse n'est pas concerné par le changement.

Enfin, une erreur fréquente porte sur le signe du premier terme contenu dans la parenthèse. Si on souhaite supprimer les parenthèses de l'expression $150 - (60 - 10 + 50)$ qui vaut 50, il faut identifier correctement les signes de chacun des termes situés à l'intérieur de la parenthèse. Aucun problème pour 10 et 50, dont les signes sont explicites, mais le signe de 60 est un « plus » sous-entendu. Le « moins » situé devant la parenthèse s'applique à l'ensemble de l'expression entre parenthèses, et non à 60. Si cette parenthèse est supprimée, son signe n'a plus d'objet, il disparait également. C'est le « plus » implicite du nombre 60 qui doit être remplacé par « moins ». On obtient alors $150 - (60 - 10 + 50) = 150 - 60 + 10 - 50$.

Une règle analogue est proposée pour le cas où les parenthèses sont précédées d'un signe plus : *« Si une parenthèse s'ouvre derrière un signe +, on peut enlever cette parenthèse sans rien changer ».* Cette règle est moins difficile à utiliser que la précédente, il suffit pour ne pas commettre d'erreur de s'assurer que la parenthèse est bien un terme du calcul. On ne peut par exemple pas l'utiliser pour transformer l'écriture de $150 + (20 + 50 - 20) \times 2$.

Sommes et différences de nombres relatifs

Les nombres relatifs sont rares au concours, rappelons cependant quelques points les concernant :

Quand deux signes sont écrits devant un nombre comme dans les exemples suivants : $+(-3)$; $-(-5)$; $+(+4)$; $-(+8)$, le signe situé dans la parenthèse est celui du nombre (qui peut être positif ou négatif), celui situé devant la parenthèse est un signe d'opération.

Quand le nombre écrit dans la parenthèse est positif, une simplification immédiate est possible. $(+7)$ désigne le même nombre que 7, donc $+(+7)$ peut s'écrire $+7$; -(+7) peut s'écrire -7.

Quand le nombre écrit dans la parenthèse est négatif, on peut comprendre la règle de suppression en interprétant le nombre dans la parenthèse comme un gain ou une perte. Ajouter une perte, c'est une perte alors qu'enlever une perte est un gain (imaginez qu'on annule la dernière partie d'un jeu, où vous aviez perdu 10 points). La traduction mathématique est la suivante :
$+(-12)$ peut s'écrire -12 ; $-(-8)$ peut s'écrire $+8$.

Il est très souvent avantageux d'effectuer dès que possible ces simplifications.

Une fois les écritures simplifiées, les additions et soustractions de nombres relatifs se ramènent dans certains cas à ce qu'on savait déjà faire avec les nombres naturels : $7 - 3$ et $8 + 4$ n'ont pas changé de valeur. Seuls des cas comme $-5 - 10$, $-10 + 2$ ou $-10 + 30$ posent quelques difficultés.

L'interprétation en terme de gains et de pertes est à nouveau pertinente :

$-10 - 5$ peut s'interpréter comme une perte de 10 suivie d'une perte de 5. Le résultat est une perte de 15, donc $-10 - 5 = -15$.

$-10 + 2$ signifie une perte de 10 suivie d'un gain de 2. Le résultat est une perte, le montant de cette perte est la différence entre les deux nombres, donc $-10 + 2 = -8$

$-10+30$ signifie une perte de 10 suivie d'un gain de 30. Cette fois, le montant du gain étant plus important que celui de la perte, le résultat est un gain. Le montant du gain est la différence entre les deux nombres.

Ce dernier calcul peut également être effectué en pensant que, dans une somme algébrique, l'ordre des termes importe peu à condition que chaque terme conserve son signe. $3-7-8+10$ est égal à $10+3-8-7$ ou à $-7+3-8+10$.

De ce point de vue, $-10+30=30-10\ldots$ on se retrouve en terrain familier.

Remarque : ce que nous venons de dire est cohérent avec les règles de suppression de parenthèses exposées plus haut :

$-5-10=-(5+10)=-15$

$-10+2=-(10-2)=-8$

Produit de nombres relatifs

Le produit de deux nombres positifs est positif : $(+5)\times(+10)=5\times10=50$

Le produit d'un nombre positif et d'un nombre négatif est négatif. On l'admet facilement si on interprète la multiplication comme une addition réitérée :

$(+5)\times(-4)=5\times(-4)=(-4)+(-4)+(-4)+(-4)+(-4)=-4-4-4-4-4=-20$

$(-5)\times(+4)=(-5)\times4=4\times(-5)=(-5)+(-5)+(-5)+(-5)=-5-5-5-5=-20$

Seul le produit de deux nombres négatifs pose un problème de sens. Les mathématiciens savants eux-mêmes ont accepté avec réticence que le produit de nombres négatifs soit positif. Cela a fini par s'imposer parce que les résultats obtenus en calculant ainsi sont cohérents et sensés.

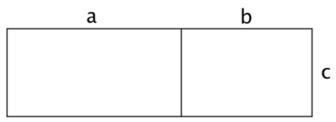
Le raisonnement en terme de gain et de perte n'est ici d'aucun secours.

Il ne reste qu'à apprendre que $(-5)\times(-3)=+15\ldots$ parce que c'est le fruit du travail de nombreux mathématiciens qui ont réfléchi à la question pendant des siècles.

Le signe d'un quotient se détermine comme celui d'un produit.

Développement et factorisation

Pour calculer le prix de 5 lots comprenant chacun un objet à 10€ et un objet à 20€, les deux calculs suivants conviennent : $5\times(10+20)$ ou $5\times10\ +\ 5\times20$.



Pour calculer l'aire totale de la figure ci-dessus, les deux calculs suivants conviennent :

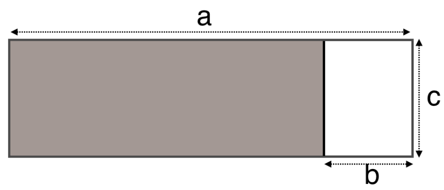
$$(a+b)\times c \quad \text{ou} \quad a\times c\ +\ b\times c$$

Remplacer dans un calcul $5\times(10+20)$ par $5\times10\ +\ 5\times20$ ou bien $(a+b)\times c$ par $a\times c\ +\ b\times c$ s'appelle développer.

Il s'agit de tranformer une écriture sous forme de produit en une écriture sous forme de somme.

Remplacer dans un calcul $5 \times 10 \ + \ 5 \times 20$ par $5 \times (10 + 20)$ ou bien $a \times c \ + \ b \times c$ par $(a + b) \times c$ s'appelle factoriser.

Il s'agit de tranformer une écriture sous forme de somme en une écriture sous forme de produit.



De même, l'aire de la partie grisée de la figure ci-dessus peut s'exprimer par $a \times c \ - \ b \times c$ (forme développée) ou par $(a - b) \times c$ (forme factorisée).

Quand on calcule seulement avec des nombres écrits en chiffres, la factorisation ou le développement peuvent faciliter les calculs, mais il est rare que cela modifie de façon plus substantielle le travail à effectuer. En revanche, quand certains nombres sont représentés par des lettres, la forme que prend une expression est parfois un élément essentiel pour répondre à la question qu'on se pose. C'est ce qui justifie l'importance accordée dans l'enseignement secondaire au développement et à la factorisation.

Quelques exemples :

— *On considère un nombre entier n et le nombre entier A égal à* $2\,(2n + 5) + 7\,(2n + 5)$.
En factorisant A on obtient $9\,(2n + 5)$, *ce qui montre que A est un multiple de 9.*

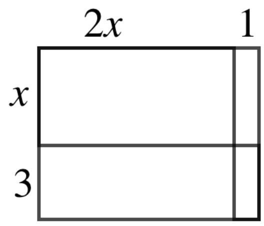
— *On considère l'équation* $(x - 5)\,(x - 3) = 0$ *et l'équation équivalente obtenue en développant le membre de gauche :* $x^2 - 8x + 15 = 0$.
En observant la première version (factorisée), il est facile de voir les deux solutions de l'équation : si l'une des deux parenthèses est égale à 0, alors le produit est égal à 0. Les nombres 5 et 3 sont donc les solutions de cette équation, ce qui est beaucoup plus difficile à trouver à partir de la forme développée.

— *On considère le nombre* $C = (x + 3)\,(x - 3)$. *Quelle est la plus petite valeur que peut prendre le nombre C ? On peut répondre à cette question en écrivant C sous la forme développée* $C = x^2 - 9$. *Comme* x^2 *est positif ou nul, la plus petite valeur possible de C est obtenue quand* $x^2 = 0$. *C vaut alors -9.*

Le développement d'une expression est une opération assez mécanique.

Considérons l'expression $D = (x + 3)\,(2x + 1)$.

Pour la développer, on peut considérer qu'elle représente l'aire d'un rectangle :



Développer consiste à exprimer l'aire du rectangle comme une somme de plusieurs aires, on obtient :
$D = (x+3)\,(2x+1) = x(2x+1) + 3(2x+1) = 2x^2 + x + 6x + 3 = 2x^2 + 7x + 3$ ou bien :
$D = (x+3)\,(2x+1) = (x+3) \times 2x + (x+3) \times 1 = 2x^2 + 6x + x + 3 = 2x^2 + 7x + 3.$
Nous vous laissons de faire correspondre chaque étape du calcul avec un découpage.
La dernière étape consiste à regrouper les termes « en x », en remplaçant $6x + x$ par $7x$. On dit alors qu'on réduit l'expression.

On peut, avec un peu d'entrainement, développer directement en une somme de quatre termes en sautant une des étapes intermédiaires :
$D = (x+3)\,(2x+1) = 2x^2 + 6x + x + 3 = 2x^2 + 7x + 3.$

Penser au calcul de l'aire d'un rectangle comme nous venons de le faire a des limites quand l'expression comporte des signes « moins » ou des nombres négatifs, c'est pourquoi certains préfèrent le schéma mnémotechnique suivant :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Si on remplace un + par un -, le schéma d'ensemble reste valable, il suffit de tenir compte de la règle des signes d'un produit.

$$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$$

En revanche, contrairement au calcul de l'aire d'un rectangle, ce schéma ne met pas en évidence le sens des opérations effectuées, ce qui peut conduire à des absurdités comme celle-ci :

$$\xcancel{(a \times b)(c \times d) = ac \times ad \times bc \times bd}$$

Identités remarquables

Il est toujours possible (pas toujours utile) avec un peu d'attention de développer une expression.
En revanche, factoriser une expression est souvent difficile, parfois impossible.
Transformer $(2x+3)\,(4x+5)$ en $8x^2 + 22x + 15$ ne nécessite qu'un calcul soigneux.
Factoriser $8x^2 + 22x + 15$ est extrêmement difficile.
Mémoriser les « identités remarquables » permet dans certains cas une factorisation qui serait presque impossible autrement.

Voici les trois identités considérées comme assez remarquables pour mériter d'être mémorisées :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Exemple d'utilisation des identités remarquables : factoriser $A = (3x+8)^2 - 16$

Dans l'expression A on reconnait une forme proche de $a^2 - b^2$. Il s'agit d'une différence dont le premier terme est un carré.
En écrivant le deuxième terme sous la forme d'un carré, nous obtenons $A = (3x+8)^2 - 4^2$, ce qui est exactement de la forme $a^2 - b^2$.
$(3x+8)$ joue dans cette écriture de A le même rôle que a dans $a^2 - b^2$. 4 joue le rôle de b.
Recopions l'égalité $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ en remplaçant a par $(3x+8)$ et b par 4.
Nous obtenons $(3x+8)^2 - 4^2 = ((3x+8)+4)((3x+8)-4)$. L'expression A est factorisée.
L'usage veut qu'on simplifie les parenthèses. $A = (3x+12)(3x+4)$

Deuxième exemple : factoriser $B = 4x^2 + 25 + 10x$

L'expression B peut s'écrire $(2x)^2 + 10x + 5^2$. C'est la somme de trois termes dont le premier et le dernier sont des carrés, cela évoque la forme $a^2 + 2ab + b^2$.

L'expression $(2x)^2 + 10x + 5^2$ est-elle conforme au modèle $a^2 + 2ab + b^2$?

$(2x)$ tient le rôle de a et 5 celui de b. Pour que l'expression soit conforme au modèle, $10x$ doit tenir le rôle de $2ab$. Or $2 \times (2x) \times 5 = 20x$ et non $10x$, l'expression $(2x)^2 + 10x + 5^2$ n'est donc pas conforme au modèle $a^2 + 2ab + b^2$.

On ne peut donc pas utiliser l'identité $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ pour factoriser B.

Remarque : ce qui précède n'indique pas si B peut ou non être factorisé par une autre méthode.

Troisième exemple : factoriser $C = 9x^2 - 12x + 4$

L'expression C peut s'écrire $(3x)^2 - 12x + 2^2$. C'est la somme de trois termes dont le premier et le dernier sont des carrés, cela évoque la forme $a^2 - 2ab + b^2$.

L'expression $(3x)^2 - 12x + 2^2$ est-elle conforme au modèle $a^2 - 2ab + b^2$?

$(3x)$ tient le rôle de a et 2 celui de b. Pour que l'expression soit conforme au modèle, $12x$ doit tenir le rôle de $2ab$. Or $2 \times (3x) \times 2 = 12x$, l'expression $(3x)^2 - 12x + 2^2$ est donc conforme au modèle $a^2 - 2ab + b^2$.

On recopie alors l'égalité $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ en remplaçant a par $3x$ et b par 2.

Nous obtenons $(3x)^2 - 12x + 2^2 = (3x-2)^2$. L'expression C est factorisée.

Exercices

Ce chapitre comporte peu d'exercices car les exercices de calcul pur sont peu nombreux au concours. Les informations données ci-dessus ont surtout pour but de vous aider dans les calculs présents dans tous les autres chapitres.

Exercice 1

On donne 5 écritures différentes du même nombre A.

$$A = (2x - 8)^2$$
$$A = 4x^2 - 32x + 64$$
$$A = 4x(x - 8) + 64$$
$$A = 4(x^2 - 8x + 16)$$
$$A = 4(x - 4)^2$$

Pour chacune des questions suivantes, choisir une des formes proposées et répondre de façon immédiate à la question à l'aide de l'expression choisie.

— Pour quelles valeurs de x le nombre A est-il négatif ?
— Est-il vrai que, quand x est un nombre entier, A est multiple de 4 ?
— Quelle est la valeur de A/4 quand $x = 14$?
— Quelle est la valeur de A quand $x = 8$?

Vous pouvez bien entendu vérifier l'égalité des 5 expressions du nombre A proposées, c'est même conseillé, mais ce n'est pas l'objet de l'exercice.

Exercice 2

On donne 5 écritures différentes du même nombre B.

$$B = 4x(x - 8)$$
$$B = 4x^2 - 32x$$
$$B = (2x)^2 - 16 \times 2x$$
$$B = 2(2x^2 - 16x)$$
$$B = (2x + 8)^2 - 64(x + 1)$$

Pour chacune des questions suivantes, choisir une des formes proposées et répondre de façon immédiate à la question à l'aide de l'expression choisie. Quand la question porte à la fois sur les nombres A est B, il s'agit du nombre A de l'exercice précédent.

— Y a-t-il des valeurs de x pour lesquelles $B = 0$?
— Quelle est la valeur de B quand $x = 9$?
— Est-il vrai que, quand $x = 67,28$, le nombre B est plus grand que $(2x + 8)^2$?
— Est-il vrai que, pour une même valeur de x, A est toujours plus grand que B ?

Exercice 3

Pour chacun des nombres suivants, donner une expression de son double, obtenue exclusivement en doublant ou en divisant par deux un ou plusieurs des nombres de l'expression donnée.

Par exemple, le double de $3 \times \frac{2+6}{4}$ peut s'écrire $6 \times \frac{2+6}{4}$ ou $3 \times \frac{4+12}{4}$ ou encore $3 \times \frac{2+6}{2}$.

$A = 11 \times 7 - 9 \times 5 \quad ; \quad B = \frac{4\frac{8}{6}}{6\frac{4}{8}} \quad ; \quad C = 6 \times (2+5)^2 - 5$

$D = (5+7) \times (11+3) \quad ; \quad E = \frac{7}{4+8} \times \frac{6+4}{16}$

Exercice 4

On donne les égalités suivantes :
$20^2 - 15^2 = 175 \;\; ; \;\; 15^2 - 10^2 = 125 \; ; \; 175 - 125 = 50.$
$40^2 - 35^2 = 375 \;\; ; \;\; 35^2 - 30^2 = 325 \; ; \; 375 - 325 = 50.$
$95^2 - 90^2 = 925 \;\; ; \;\; 90^2 - 85^2 = 875 \; ; \; 925 - 875 = 50.$

1. Énoncer une conjecture suggérée par ces égalités.
2. Démontrer la conjecture énoncée à la question précédente ou, le cas échéant, prouver qu'elle est fausse.

Indications sur les exercices

Exercice 3

Pour résoudre cet exercice, on peut s'appuyer sur les connaissances suivantes, qui sont en réalité des formulations un peu différentes de certaines règles de calcul usuelles :
— On double la valeur d'un produit en doublant un et un seul de ses facteurs.
— On double la valeur d'une somme en doublant tous ses termes (il s'agit d'une somme au sens algébrique, elle peut comporter plus de deux termes et certains termes peuvent être affectés du signe -).
— On double la valeur d'une fraction en doublant son numérateur ou en divisant par deux son dénominateur.
Retenir ces formulations est intéressant, car elles sont encore vraies si on remplace « doubler » par « multiplier par un nombre k » et même par « diviser par un nombre k » puisque diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

Exercice 4

Une conjecture est une affirmation générale dont on présume qu'elle est vraie sans que cela soit encore prouvé.

Souvent, une conjecture résulte, comme dans cet exercice, de plusieurs exemples ayant un caractère commun. Énoncer la conjecture peut se faire sous forme d'un texte ou d'une formule mathématique. Dans l'énoncé de la conjecture, on doit porter attention non seulement au résultat (dans cet exercice, certains calculs semblent valoir toujours 50), mais peut-être plus encore aux conditions dans lesquelles la conjecture semble vraie (quelles particularités ont les nombres utilisés dans les exemples).

Solutions des exercices

Exercice 1

- La première expression montre que A n'est jamais négatif puisque c'est un carré.
- Les deux dernières expressions montrent que, si x est entier, A est multiple de 4 (en effet, l'expression entre parenthèses est entière).
- La dernière expression montre que $\frac{A}{4} = (x-4)^2$. Si $x = 14$, on a alors $\frac{A}{4} = 100$.
- La troisième expression de A montre immédiatement que si $x = 8$, $A = 64$.

Exercice 2

- La première expression montre que B $=$ 0 si $x = 8$, ainsi que si $x = 0$
- La première expression est probablement celle qui conduit au calcul de B le plus simple quand $x = 9$. En effet, la valeur de la parenthèse est alors 1, donc B $=$ 36.
- Quand $x = 67,28$ la dernière expression de B montre qu'on obtient B en soustrayant de $(2x+8)^2$ un nombre positif, B est donc plus petit que $(2x+8)^2$.
- La comparaison de la troisième écriture de A et de la première écriture de B montre que $A = B + 64$. Il est donc vrai que A est toujours plus grand que B. On peut aussi utiliser la deuxième écriture de chacun des deux nombres.

Exercice 3

$2A = 22\times7-18\times5$; $2A = 11\times14-18\times5$; $A = 22\times7-9\times10$; $2A = 11\times14-9\times10$

$2B = \dfrac{8\frac{8}{6}}{6\frac{4}{8}}$; $2B = \dfrac{4\frac{16}{6}}{6\frac{4}{8}}$; $2B = \dfrac{4\frac{8}{3}}{6\frac{4}{8}}$; $2B = \dfrac{4\frac{8}{6}}{3\frac{4}{8}}$; $2B = \dfrac{4\frac{8}{6}}{6\frac{2}{8}}$; $2B = \dfrac{4\frac{8}{6}}{6\frac{4}{16}}$; $2B = \dfrac{8\frac{8}{6}}{12\frac{2}{8}}$ etc.

$2C = 12\times(2+5)^2-10$; $2C = 3\times(4+10)^2-10$

$2D = (10+14)\times(11+3)$; $2D = (5+7)\times(22+6)$

$2E = \frac{14}{4+8}\times\frac{6+4}{16}$; $2E = \frac{7}{2+4}\times\frac{6+4}{16}$; $2E = \frac{7}{4+8}\times\frac{12+8}{16}$; $2E = \frac{7}{4+8}\times\frac{6+4}{8}$

Exercice 4

1. Les exemples proposés suggèrent la conjecture suivante : si a, b et c sont trois multiples de 5 consécutifs (avec $a < b < c$), alors $\left(c^2-b^2\right)-\left(b^2-a^2\right) = 50$
2. Soient a, b et c trois multiples de 5 consécutifs. $b = a+5$ et $c = b+5$, donc :
   $\left(c^2-b^2\right)-\left(b^2-a^2\right) = \Big((b+5)^2-b^2\Big)-\Big((a+5)^2-a^2\Big)$
   $\left(c^2-b^2\right)-\left(b^2-a^2\right) = \left(b^2+10b+25-b^2\right)-\left(a^2+10a+25-a^2\right)$
   $\left(c^2-b^2\right)-\left(b^2-a^2\right) = (10b+25)-(10a+25) = 10b+25-10a-25 = 10b-10a$
   or $b = a+5$, donc $\left(c^2-b^2\right)-\left(b^2-a^2\right) = 10a+50-10a$, la conjecture énoncée plus haut est donc vraie.
   Remarque : dans cette preuve nous n'avons pas utilisé le fait que a, b et c sont des multiples de 5, il suffit pour que l'affirmation soit vraie que $b = a+5$ et $c = b+5$. Elle est donc vraie également pour les nombres 11, 16 et 21 ou π, $\pi+5$ et $\pi+10$.