

Formules de calcul d'aires

Les propositions de ce document s'appuient sur l'introduction de la notion d'aire exposée dans la page « l'aire, qu'est-ce que c'est ».

On présente ici un exposé du maître. Si l'enseignant souhaite introduire le calcul de l'aire d'un rectangle à l'aide d'une situation problème (et s'il dispose d'une situation adaptée) l'exposé ci-dessous peut alors servir de conclusion.

Cependant, les contraintes de temps interdisent d'introduire toutes les notions à l'aide de situations problèmes. Il nous semble que le calcul de l'aire du rectangle peut être traité de façon frontale et magistrale sans inconvénient, car sa compréhension ne présente pas de difficulté majeure, du moins quand les dimensions sont entières.

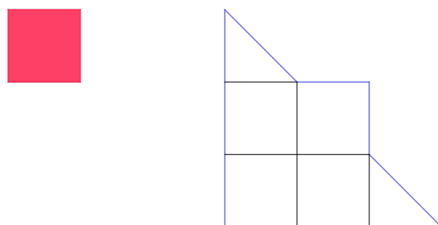
Le calcul de l'aire du triangle est plus délicat. Le contenu de cette page correspond à plusieurs séances avec les élèves.

Le calcul de l'aire d'un disque nous semble un objectif marginal à l'école élémentaire, il ne nous semble pas judicieux d'y passer beaucoup de temps.

Calculer l'aire d'un rectangle ou d'un carré

Il y a quelques jours, nous avons appris ce qu'est l'aire d'une figure.

Nous avons vu par exemple que l'aire de cette figure est de 5 carrés rouges parce qu'on peut la recouvrir exactement avec 5 carrés rouges (4 carrés entiers et un autre découpé en deux triangles).



Nous allons continuer ce travail sur les aires, mais aujourd'hui nous n'utiliserons pas n'importe quel carré rouge.

Pour se comprendre quand on parle de longueurs, tout le monde utilise les mêmes unités : le mètre, le centimètre, le kilomètre...

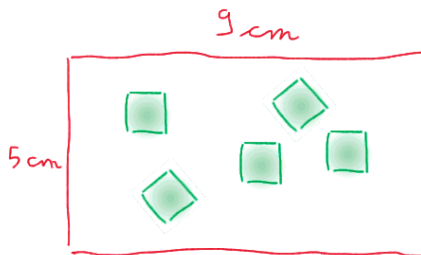
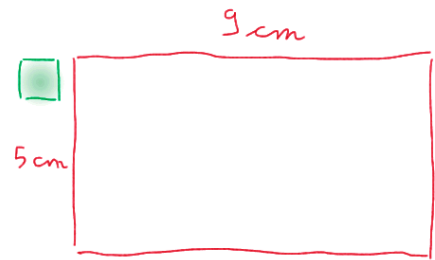
C'est la même chose pour les aires, si notre classe utilise un carré rouge et que la classe des correspondants utilise un autre carré, peut-être rouge aussi, mais pas de la même taille nous ne pourrions pas nous comprendre.

Pour mesurer les aires, on utilise un carré qui a des côtés de un mètre, qu'on appelle le mètre carré.

Si on mesure des surfaces très grandes (un pays entier par exemple), on utilise plutôt un carré qui a des côtés de un kilomètre, on l'appelle le kilomètre carré.

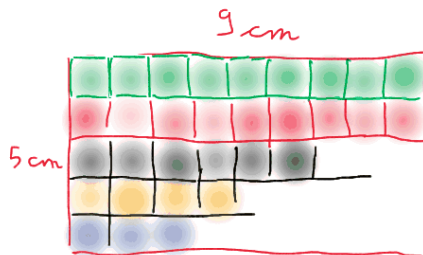
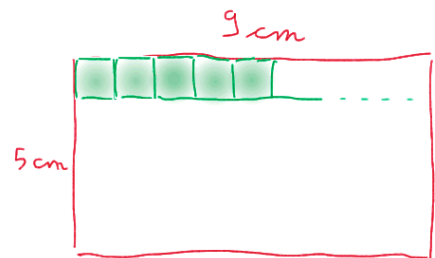
Pour des figures qui tiennent sur une feuille de cahier, on utilise en général un carré qui a des côtés de un centimètre, on l'appelle le centimètre carré.

-Imaginez que vous voulez connaître l'aire du rectangle rouge, c'est-à-dire savoir combien il faut de centimètres carrés verts pour le recouvrir.
Comment vous y prendrez-vous ?



Certainement pas comme ça : il y aurait des trous difficiles à remplir, on serait obligé de découper les centimètres carrés, ça ne serait pas pratique du tout.

C'est beaucoup plus malin de commencer comme ça : j'aligne des centimètres carrés le long d'un des côtés du rectangle. Les centimètres carrés ont des côtés de un centimètre, alors je peux faire une rangée de 9 centimètres carrés.

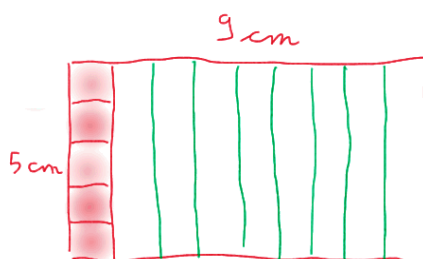
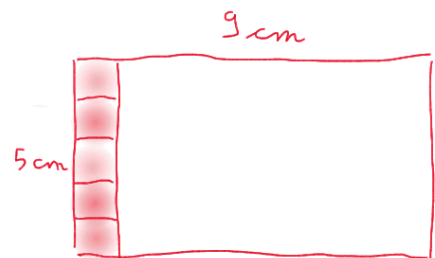


Ensuite, je peux faire une deuxième rangée de neuf centimètres carrés juste en dessous (en rouge), puis une troisième (en noir) ...

Comme le rectangle a 5 centimètres de large, je peux le recouvrir par 5 rangées de 9 centimètres carrés.

On peut recouvrir ce rectangle avec 5 fois 9 centimètres carrés.
L'aire du rectangle est 5 x 9 centimètres carrés.

Bien entendu, on peut aussi commencer à placer les centimètres carrés comme ça.



Le rectangle contient 9 colonnes, et chaque colonne contient 5 centimètres carrés.

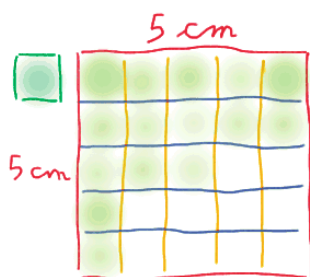
On peut recouvrir le rectangle avec 9 fois 5 centimètres carrés.
L'aire du rectangle est 9 x 5 centimètres carrés.

On trouve dans les livres la formule suivante :

$$\text{Aire du rectangle} = \text{Longueur} \times \text{largeur}$$

C'est une façon de résumer ce que je viens de vous expliquer.

Si le hasard fait que la longueur et la largeur du rectangle sont égales, ça ne change rien... On a un carré, mais son aire se calcule de la même manière que pour les autres rectangles.



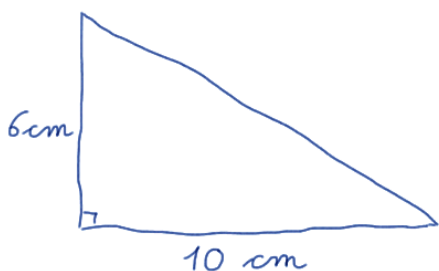
Cette formulation est discutable, car pour la plupart des élèves de cycle 3, les carrés ne sont pas des rectangles. Cependant, mettre en évidence que, du point de vue de l'aire, le carré se comporte comme le rectangle contribue à préparer la réorganisation nécessaire dans l'enseignement secondaire : les carrés font partie de la famille des rectangles.

Calculer l'aire d'un triangle

Quand on trace une diagonale d'un rectangle, le rectangle est découpé en deux triangles rectangles identiques.



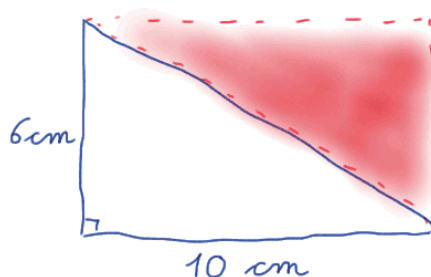
Puisqu'ils sont identiques, chacun des deux contient autant de centimètres carrés. Par exemple, ce rectangle contient 12×4 centimètres carrés, soit 48 centimètres carrés, alors chacun des deux triangles rectangles en contient la moitié : 24 centimètres carrés.



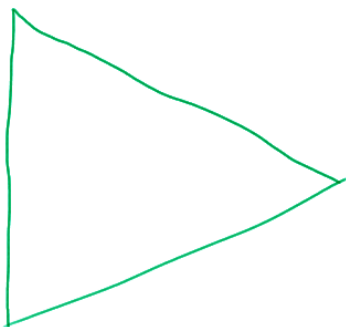
Comment calculer l'aire de ce triangle rectangle ?

Je fabrique (ou j'imagine seulement) un rectangle avec deux triangles identiques.

Je calcule le nombre de centimètres carrés pour recouvrir le rectangle : il en faut 6×10 c'est à dire 60.



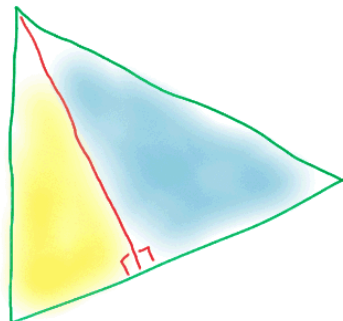
Comme le rectangle est formé de deux triangles identiques, chaque triangle contient la moitié de ces 60 centimètres carrés. $60 : 2 = 30$. L'aire de ce triangle rectangle est de 30 centimètres carrés.



Et si le triangle n'est pas rectangle ?

Je le découpe en deux triangles rectangles en traçant une hauteur (voir document sur la hauteur d'un triangle dans la partie géométrie).

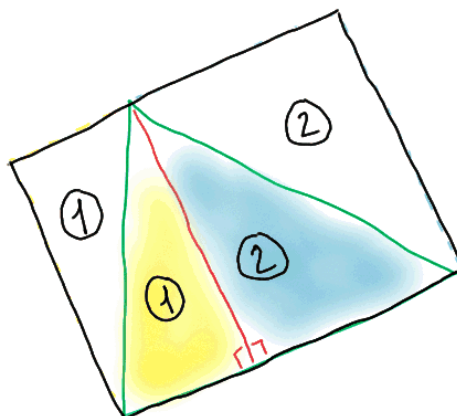
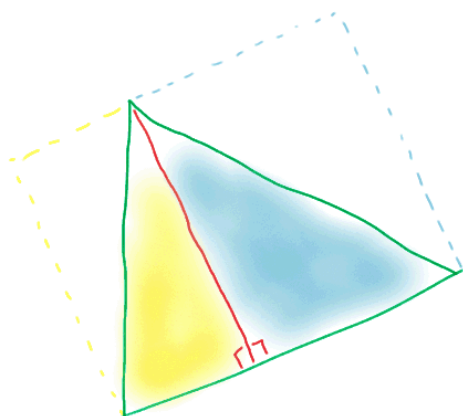
Je calcule ensuite l'aire de chaque triangle rectangle, puis j'additionne les deux résultats.



Je peux aussi utiliser une astuce :

Je forme un rectangle avec deux triangles jaunes et un autre avec deux triangles bleus.

En dessinant ces deux petits rectangles, j'ai aussi formé un grand rectangle (en noir).



Dans ce grand rectangle :

Les deux triangles numéro 1 sont identiques, les deux triangles numéro 2 sont identiques.

La partie colorée est formée d'un triangle numéro 1 et d'un triangle numéro 2.

La partie blanche est formée avec les mêmes morceaux.

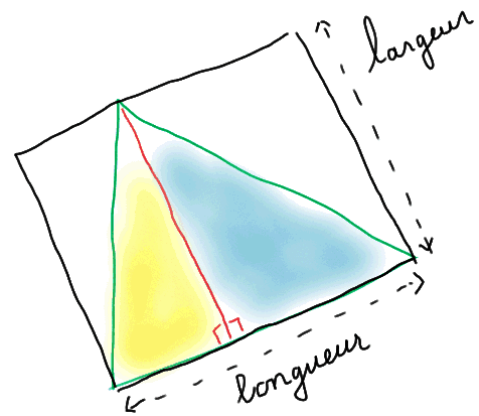
Si chaque triangle « 1 » se recouvre avec 20 centimètres carrés et chaque triangle « 2 » avec 30 centimètres carrés, la partie colorée se recouvre avec 50 centimètres carrés et la partie blanche aussi.

Si l'aire des triangles « 1 » mesure 5 centimètres carrés et celle des triangles « 2 » 6 centimètres carrés, l'aire de la partie colorée est 11 centimètres carrés, celle de la partie blanche aussi.

L'aire de la partie blanche et l'aire de la partie colorée sont toujours égales : elles valent chacune autant que l'aire d'un triangle « 1 » plus celle d'un triangle « 2 ».

L'aire du triangle coloré, celle que je cherche, est donc la moitié de celle du rectangle noir.

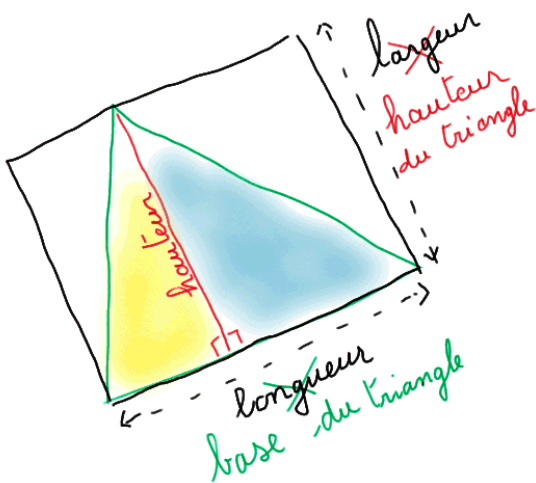
Pour calculer l'aire du triangle coloré, je calcule l'aire du rectangle noir puis je divise par 2.



En utilisant la formule qui résume le calcul de l'aire d'un rectangle, cela donne :

$$\text{Aire du triangle} = (\text{Longueur du rectangle} \times \text{largeur du rectangle}) : 2$$

Cette formule est juste, mais les mathématiciens ne l'aiment pas parce qu'elle oblige à tracer le rectangle noir autour du triangle pour calculer l'aire du triangle. Ils préfèrent dire la même chose d'une autre façon en employant des mots qui parlent du triangle, pas du rectangle.



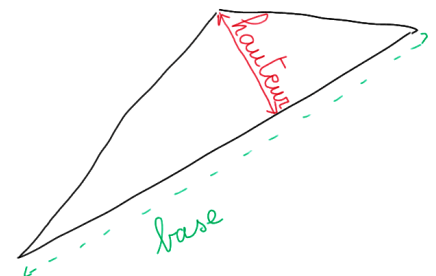
La longueur du rectangle est aussi un des côtés du triangle. Le côté du triangle qu'on utilise pour calculer l'aire est appelé « base ».

La largeur du rectangle est égale à la hauteur tracée dans le triangle.

Si on remplace le mot « **longueur** » par « **base** » et le mot « **largeur** » par « **hauteur** », la formule s'écrit comme ceci :

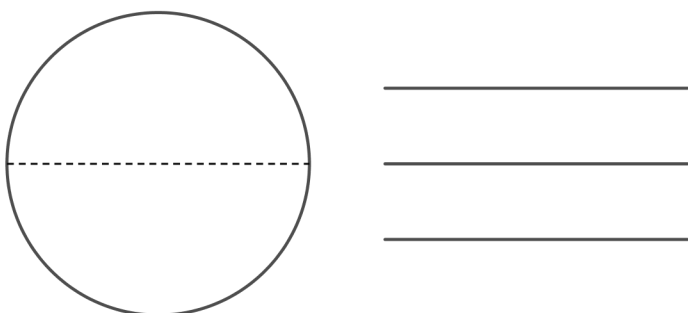
$$\text{Aire du triangle} = (\text{Base} \times \text{hauteur}) : 2$$

Dans les livres, la formule de calcul de l'aire du triangle est toujours écrite comme cela, et c'est ce que vous devrez retenir, mais c'est bien difficile à comprendre si on ne pense pas au rectangle qu'on peut dessiner autour du triangle.



Remarque : nous pensons suffisant à l'école élémentaire de se limiter au calcul à l'aide d'une hauteur interne au triangle.

Calculer l'aire d'un disque



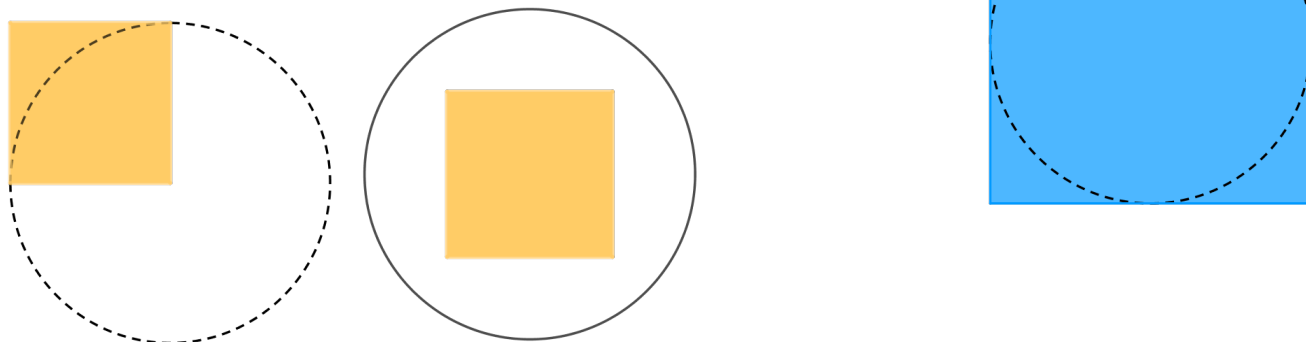
Quand nous avons travaillé sur le périmètre des figures, le cercle n'a pas été la figure la plus simple... il n'y a pas de côté droit qu'on peut mesurer à la règle.

Nous avons expliqué pourquoi le périmètre du cercle mesure un peu plus que 6 rayons, ou un peu plus que 3 diamètres.

Nous avons vu que les mathématiciens appellent PI (qu'ils écrivent π) le nombre de diamètres qu'il faut pour faire le tour du cercle. Ils ont prouvé que ce nombre PI vaut à peu près 3,141592.

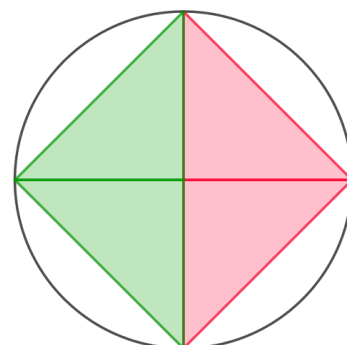
Pour l'aire du disque, ce n'est pas très pratique non plus : recouvrir une surface dont les bords sont arrondis avec des carrés n'est pas facile.

Un carré qui a un côté égal au diamètre du cercle est trop grand : il recouvre plus que le disque.



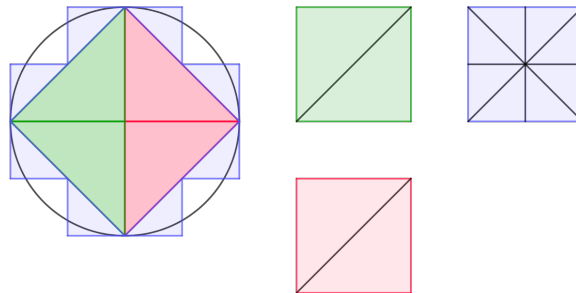
Un carré dont les côtés sont égaux au rayon du cercle est trop petit, il ne recouvre qu'une petite partie du disque.

Deux carrés dont les côtés sont égaux au rayon du disque ne suffisent pas à recouvrir le disque, c'est facile à voir si on découpe chaque carré en deux triangles.

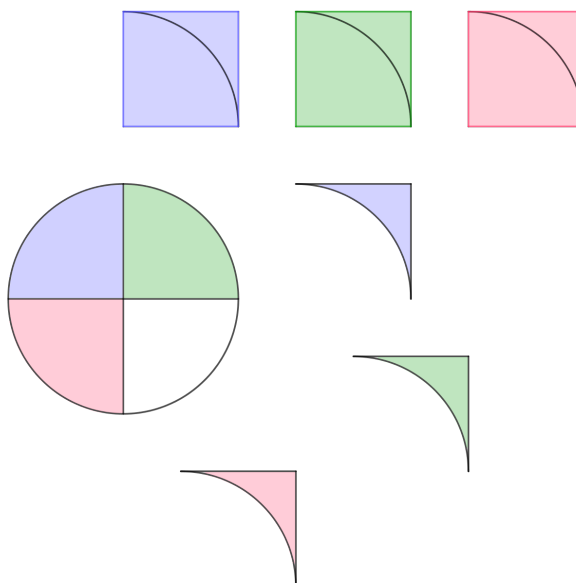


Et avec trois carrés de cette taille ?

En découpant un troisième carré en huit triangles comme le montre la figure, on n'est pas très loin de recouvrir le disque : il y a des morceaux qui dépassent du disque et il y a aussi des morceaux du disque qui ne sont pas recouverts.



Une autre façon d'essayer de recouvrir un disque avec trois carrés qui ont des côtés égaux au rayon du disque :



Si on dispose d'un temps suffisant, il peut être intéressant de proposer aux élèves de chercher d'autres découpages de trois carrés pour tenter de recouvrir le disque. Ils peuvent ainsi se convaincre qu'il faut **un peu plus** que trois carrés pour recouvrir le disque (ce qui est plus précis qu'« environ trois carrés » comme le montrent les illustrations précédentes).

Les mathématiciens ont prouvé que pour recouvrir le disque il faut un peu plus de trois carrés et qu'il en faut exactement π , le même nombre que pour calculer le périmètre du cercle.

$$\text{Aire du disque} = \pi \times \text{aire du carré qui a pour côté le rayon du disque}$$

Comme on sait déjà calculer l'aire du carré, on peut écrire la formule comme ça (et c'est comme ça qu'on la retient) :

$$\text{Aire du disque} = \pi \times \text{rayon} \times \text{rayon}$$