Écrire si possible chacun des nombres suivants sous forme d'une puissance d'un nombre entier

$A = 5 \times 10^{12} \times 2 \times 10^{7}$
$B = 3^{8} + 3^{8} + 3^{8}$
$C = 12 \times 2^{10} + 4 \times 2^{10}$
$D = 10^{15} \times 100^{9}$
$E = \left(2^{5}\right)^{3}$
$F = 100^{7} + 1000^{5}$
$G = 2^{12} + 4^{6}$
$H = 5 \times 10^{12} \times 20 \times 10^{5}$
$J = 15 \times 3^{10} - 6 \times 3^{10}$
$K = 4 \times 5^{9} + 5^{9}$
$L = 900 \times 10^{9} + 10^{11}$

Les premiers exercices sont suivis d'une solution détaillée exposant les raisonnements logiques (comment savons nous que ceci est vrai) et euristiques (qu'est-ce qui peut donner l'idée de procéder ainsi).
Les candidats n'ont pas à expliciter ainsi leur pensée.
Ils doivent seulement écrire une suite d'affirmations mathématiques vraies.
Les modifications apportées au calcul entre une étape et la suivante ne doivent pas être trop brusques, de sorte qu'une personne maitrisant quelque peu le sujet puisse reconstituer le raisonnement implicite.
Ce critère étant très subjectif, nous donnons pour chaque exercice une version conforme à ce qu'on attend d'un candidat au CRPE.

Si les exercices vous semblent trop difficiles, vous pouvez commencer par lire les solutions sans explications et chercher les raisonnements sous-jacents.
Si cela ne suffit pas, lisez et méditez les solutions détaillées, puis laissez passer un temps suffisant pour que la solution rédigée s'efface de votre mémoire avant de reprendre les exercices.

Les exercices portant sur les puissances de nombres entiers sont rares au CRPE, ils nous semblent cependant avoir toute leur place dans la préparation parce qu'ils sont emblématiques de la façon dont vous devez travailler si vous êtes en mauvais terme avec les mathématiques. Votre but ne doit pas être d'accumuler des connaissances, mais d'apprendre à utiliser quelques connaissances élémentaires en faisant preuve d'initiative et d'exigence.

$$A = 5 \times 10^{12} \times 2 \times 10^7$$

Toutes les opérations sont des multiplications, je peux en changer l'ordre sans changer la valeur de A. Je choisis de rapprocher 2 et 5 parce que $2 \times 5 = 10$

$$A = 5 \times 2 \times 10^{12} \times 10^7$$

$$A = 10 \times 10^{12} \times 10^7$$

Si je ne parviens pas à conclure à l'aide de l'écriture précédente, je peux expliciter toutes les multiplications (j'en remplace quelques-unes par des …)

$$A = 10 \quad \times \quad 10 \times \ldots\ldots \times 10 \quad \times \quad 10 \times \ldots \times 10$$

L'expression A est constituée exclusivement de nombres 10 qui se multiplient, elle peut donc être résumée sous forme d'une puissance de 10. Il suffit pour ça de compter le nombre de 10.

$$A = 10^{20}$$

$$A = 5 \times 10^{12} \times 2 \times 10^7$$
$$A = 10 \times 10^{12} \times 10^7$$
$$A = 10^{20}$$

$$B = 3^8 + 3^8 + 3^8$$

L'addition de plusieurs nombres égaux peut se résumer par une multiplication. Ceci reste vrai si les nombres égaux sont écrits sous forme de puissance.

$$B = 3 \times 3^8$$

J'imagine que 3^8 est écrit en explicitant toutes les multiplications.

$$B = 3 \quad \times \quad 3 \times 3 \times \ldots \times 3$$

Je peux résumer l'expression B sous forme d'une puissance de 3 en comptant le nombre de facteurs 3.

$$B = 3^9$$

$$B = 3^8 + 3^8 + 3^8$$
$$B = 3 \times 3^8$$
$$B = 3^9$$

$$C = 12 \times 2^{10} + 4 \times 2^{10}$$

12 trucs + 4 trucs, c'est 16 trucs

12 millions + 4 millions = 16 millions

$12 \times 1000 + 4 \times 1000 = 16 \times 1000$

Ce type d'égalité permet de transformer une somme de deux nombres en un produit… ce qui parait une étape prometteuse quand on cherche à écrire un nombre sous forme d'une puissance d'un entier.

Pour cette étape, je ne me sers pas de la signification de 2^{10}, j'utilise seulement le fait que le même nombre 2^{10} est présent deux fois (comme « trucs », « millions » ou 1000 dans les autres exemples).

$$C = 16 \times 2^{10}$$

Or $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$, donc

$$C = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \quad \times \quad 2^{10}$$

Je peux résumer l'expression C sous forme d'une puissance de 2 en comptant le nombre de facteurs 2 (ceux qui sont écrits explicitement et ceux qui sont résumés par 2^{10}.

$$C = 2^{16}$$

$$C = 12 \times 2^{10} + 4 \times 2^{10}$$
$$C = 16 \times 2^{10}$$
$$C = 2^{16}$$

$$D = 10^{15} \times 100^9$$

En explicitant les multiplications de 100^9 j'obtiens :

$$D = 10^{15} \quad \times \quad 100 \times 100 \ldots\ldots \times 100 \times 100$$

En remplaçant chaque nombre 100 par 10×10, j'obtiens :

$$D = 10^{15} \quad \times \quad 10 \times 10 \times 10 \times 10 \ldots\ldots \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$$

Je constate que ce calcul comporte uniquement des nombres 10 qui se multiplient entre eux, il me reste à les compter (ceux qui sont écrits et ceux qui sont résumés sous la forme 10^{15}).

$$D = 10^{33}$$

$$D = 10^{15} \times 100^9$$
$$D = 10^{15} \times 10^{18}$$
$$D = 10^{33}$$

Solutions non détaillées des autres exercices :

$E = \left(2^5\right)^3$
$E = 2^5 \times 2^5 \times 2^5$
$E = 2^{15}$

$F = 100^7 + 1000^5$
Le nombre F ne semble pas pouvoir s'écrire sous forme d'une puissance d'un nombre entier… sauf sous la forme $F = 1\,100\,000\,000\,000\,000^1$ qui n'a pas grand intérêt.

$G = 2^{12} + 4^6$
$G = 2^{12} + (2 \times 2)^6$
$G = 2^{12} + 2^{12}$
$G = 2 \times 2^{12}$
$G = 2^{13}$

$H = 5 \times 10^{12} \times 20 \times 10^5$
$H = 5 \times 20 \times 10^{12} \times 10^5$
$H = 100 \times 10^{12} \times 10^5$
$H = 10^{19}$

$J = 15 \times 3^{10} - 6 \times 3^{10}$
$J = 9 \times 3^{10}$
$J = 3 \times 3 \times 3^{10}$
$J = 3^{12}$

$K = 4 \times 5^9 + 5^9$
$K = 5 \times 5^9$
$K = 5^{10}$

Si la première étape vous pose problème, songez à « 4 fois cent plus cent » ou à $4 \times 5^9 + 1 \times 5^9$

$L = 900 \times 10^9 + 10^{11}$
$L = 9 \times 10 \times 10 \times 10^9 + 10^{11}$
$L = 9 \times 10^{11} + 10^{11}$
$L = 10 \times 10^{11}$
$L = 10^{12}$