Fractions

Pourquoi a-t-on inventé les fractions ?

Compter des cuillères n'est pas très difficile :



Une cuillère Deux cuillères Trois cuillères

Ce n'est pas plus difficile pour des tables, des ballons, des vaches, des manteaux ou des voitures.

Quand il s'agit de gâteaux, ce n'est pas toujours aussi simple.


Combien y a-t-il de gâteaux ici ? Ou ici ?

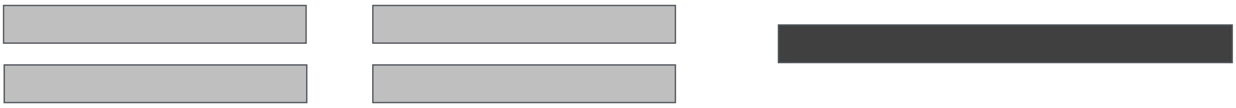
Les fractions ont été inventées pour répondre à ce genre de question.

Un message pour fabriquer une bande.

Comme vous le voyez, j'ai mis au tableau plusieurs bandes claires, toutes identiques et une bande foncée.
Je vous ai fourni le même matériel en plus petit

En utilisant les bandes claires du tableau, nous allons essayer de fabriquer une bande claire exactement de la même longueur que la bande foncée.
Pour cela, j'obéirai à vos consignes, je couperai, je déplacerai, je plierai, je collerai les bandes ou je ferai encore autre chose, exactement comme vous le direz.

Remarque : les bandes claires du tableau mesurent 44 cm, la bande foncée 66 cm.
Les modèles réduits des élèves mesurent respectivement 12 et 18 cm. Ces indications ne sont pas fournies aux élèves.



— Vous allez d'abord travailler seul pendant trois minutes et essayer de faire une bande foncée en utilisant les bandes claires. Ça ne devrait pas être très difficile. Le travail difficile commencera ensuite : vous aurez cinq minutes pour vous mettre d'accord par groupe sur des consignes : que me direz-vous pour que je réussisse au tableau à faire comme vous une bande claire aussi longue que la bande foncée ?

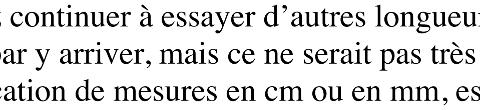
Après ces deux phases préparatoires, la mise en commun ressemblera peut-être à ce qui suit :

— Qui veut bien essayer en premier de me faire fabriquer une bande claire de la bonne longueur ?
— Tu prends une bande claire entière et puis un grand morceau d'une deuxième, et tu les mets bout à bout et ça fait la bande foncée.

— Désolé, ça ne marche pas.
— C'est parce que tu as fait un morceau trop grand.
— D'accord, le morceau est trop grand, mais j'ai fait ce que vous avez dit. Vous devez donner des consignes plus précises qui m'obligent à faire une bande de la bonne longueur, si vos consignes sont vagues comme « un grand morceau », je ne devinerai pas comment il faut faire ce morceau.
— Qui veut me donner d'autres consignes ?

— Tu prends une bande claire, et tu prends 6 centimètres dans une deuxième bande claire, et tu colles les deux ensemble.

— Désolé, ça ne marche toujours pas.
— Ton morceau est trop petit.
— Oui, il est trop petit, mais il mesure 6 cm, exactement ce que vous avez dit.
— Oui, mais tes bandes sont plus grandes, alors il faut agrandir le morceau, il doit faire plus que 6 centimètres.
— D'accord, mais plus que 6 cm ce n'est pas encore très précis, je peux faire ça par exemple et ça ne marche toujours pas.



— Évidemment, vous pourriez continuer à essayer d'autres longueurs : 8 cm , 9 cm, 10 cm et 3 mm… vous finiriez peut-être par y arriver, mais ce ne serait pas très intéressant. Je vous demande donc de ne plus utiliser d'indication de mesures en cm ou en mm, essayer de trouver d'autres façons de faire.

— Je sais, tu prends une bande, tu en plies une autre en deux, tu coupes et tu prends un des deux morceaux. Avec la bande entière et le morceau, tu fais la nouvelle bande.

L'enseignant plie sous les yeux des élèves une bande en deux parties de longueurs très différentes.

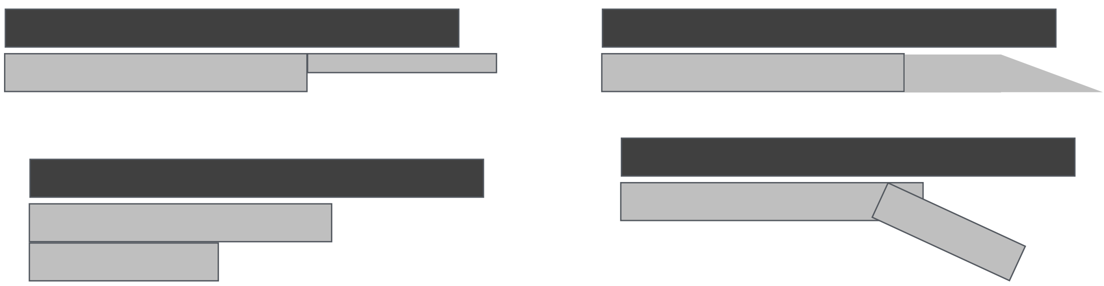
— Désolé, ça ne marche toujours pas.
— Évidemment, tu n'as pas plié comme il faut.
— Comment ça ? on m'a demandé de plier une bande en deux, c'est ce que j'ai fait, je ne l'ai pas pliée en trois morceaux ni en cinq.
— Oui, mais il fallait faire deux morceaux pareils.
— Je vous rappelle que je ne devine rien, si vous voulez deux morceaux égaux, il faut le dire. Qui veut faire un dernier essai ?

— Tu prends une bande et tu la plies juste au milieu, pour faire deux morceaux bien égaux. Après tu coupes sur le pli, tu prends un des deux morceaux et tu ajoutes une bande entière.

L'enseignant exécute les consignes : cette fois le résultat obtenu est correct.

Remarques
Toutes les procédures correctes sont bien sûr acceptées :
couper chaque bande claire en deux parties égales puis assembler bout à bout trois morceaux,
assembler deux bandes claires bout à bout puis replier une des deux en deux parties égales,
assembler trois bandes claires bout à bout puis couper en deux parties égales la bande obtenue…

Pour que la séance reste aussi brève que possible et centrée sur l'essentiel, l'enseignant est rigoureux sur tout ce qui concerne la longueur des bandes, mais accepte l'implicite sur tout le reste : le pli se fait implicitement parallèlement à la largeur de la bande, l'assemblage des bandes se fait bord à bord, sans superposition et dans la direction attendue.
L'enseignant évite donc ces exemples, même si les messages le permettent :



L'institutionnalisation à la suite de cette activité peut ressembler à ceci :

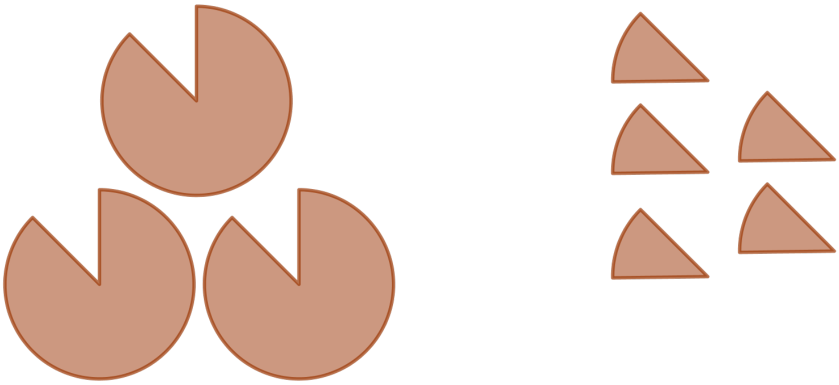
Pour obtenir le morceau de la taille qu'on veut, le message devait préciser :
- en combien de morceaux couper la bande claire (vous y aviez pensé, vous m'avez demandé de faire deux morceaux)
- que les morceaux devaient être égaux (vous n'y aviez pas pensé : dans la vie on essaie assez souvent de faire des parts égales, alors vous avez cru que je ferais des parts égales même sans qu'on me le dise).

Une petite histoire

Avant d'effectuer un autre exemple à l'aide des bandes, l'enseignant peut prendre le temps de raconter l'histoire suivante :

Pierre est un petit filou.
Il doit partager entre sa petite soeur Louna et lui des gâteaux tous identiques, mais qui ont malheureusement été cassés. Il dit à Louna :
— Dans cette main, j'ai 5 morceaux, et dans celle-ci j'ai 3 morceaux. Quelle main veux-tu ?

Bien entendu, Louna choisit la main qui contient 5 morceaux, mais quand Pierre ouvre les mains, elle n'est pas très contente :



Pierre n'a pas été très gentil, bien sûr, mais il n'a pas menti.
Cinq morceaux, ce n'est pas forcément plus que trois morceaux, tout dépend de la taille des morceaux.

Un autre message pour fabriquer une bande.

Cette fois les bandes claires du tableau ont une longueur de 56 cm, la bande foncée 98 cm.
Les bandes des élèves mesurent respectivement 10 cm et 17,5 cm.

Le déroulement est le même, les procédures correctes doivent expliciter un partage d'une ou plusieurs bandes en quatre parties **de même longueur** ou encore un partage en deux parties égales suivi d'un partage d'un des morceaux obtenus en deux parties égales.

En guise d'institutionnalisation à la suite de cette nouvelle activité, l'enseignant introduit les fractions.

Introduction des fractions

Cette partie ne décrit aucune activité des élèves, elle donne les grandes lignes du discours de l'enseignant.

Parfois, on a plus que trois gâteaux, mais moins que quatre.
Dans les exercices précédents, on avait une bande foncée plus longue qu'une bande claire, mais moins que deux bandes claires.
Je vous ai déjà dit il y a quelques jours que les factions ont été inventées pour ça : dire combien il y a quand c'est entre deux et trois, ou entre cinq et six, ou encore entre zéro et un.

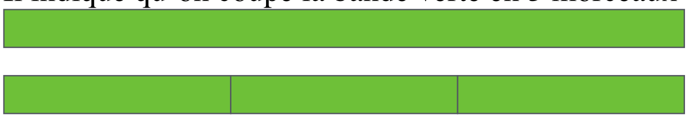
Une fraction est un nombre puisqu'elle dit combien il y a de gâteaux, de litres, de bandes ou d'autre chose encore.
Mais c'est un nombre qui s'écrit bizarrement, sur deux étages, comme ça :

$$\frac{8}{5} \qquad \frac{7}{6} \qquad \frac{5}{10} \qquad \frac{1}{3}$$

Évidemment, savoir que ces écritures s'appellent des fractions est inutile si on ne sait pas ce que ça veut dire et comment ça se lit.
L'enseignant place au tableau une bande verte de 60 cm et une bande rouge de 80 cm et écrit la phrase suivante :

La bande rouge est longue comme $\frac{4}{3}$ de bande verte.

Pour comprendre une fraction, il faut d'abord regarder le nombre du bas de la fraction, ici c'est le 3.
Il indique qu'on coupe la bande verte en 3 morceaux **égaux** et qu'on utilise ces morceaux :



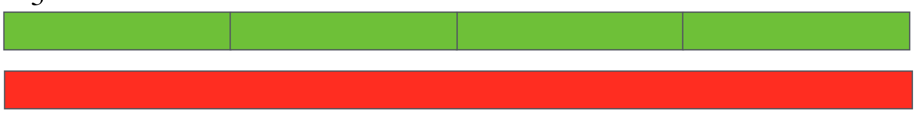
Ensuite, on regarde le nombre du haut de la fraction, il indique combien de morceaux on utilise.

$\frac{1}{3}$ de bande verte : 

$\frac{2}{3}$ de bande verte : 

$\frac{3}{3}$ de bande verte : 

$\frac{4}{3}$ de bande verte, c'est bien la même longueur que la bande rouge :



$\frac{5}{3}$ de bande verte :

L'enseignant fait deux autres démonstrations en fabriquant par exemple une bande égale à $\frac{3}{4}$ de bande verte et une autre égale à $\frac{5}{2}$ de bande verte

Remarque : à ce stade, il s'agit d'expliciter la signification de l'écriture d'une fraction. L'enseignant décrit et commente ces écriture, il évite autant que possible de les nommer à l'oral. Si toutefois « quatre tiers » lui échappe ce n'est pas dramatique, il indique que c'est comme ça qu'on lit la fraction et qu'il expliquera ça plus tard.

Comment lire les fractions

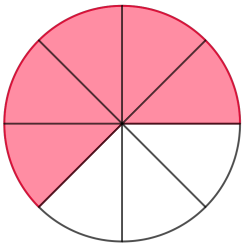
L'enseignant écrit au tableau « $\frac{3}{5}$ de bande verte »

— Je vous ai expliqué hier que cette écriture veut dire « trois morceaux de bande verte », mais pas n'importe quels morceaux, le 5 qui est en bas indique qu'il faut faire les morceaux en partageant la bande verte en 5 morceaux égaux.

Il ne nous reste plus qu'à apprendre comment on la lit.

Ici, on a partagé le disque en 8 parties égales, ces parties s'appellent des « huitièmes de disque ».
Sur cette figure, on a colorié en rouge « Cinq huitièmes de disque »

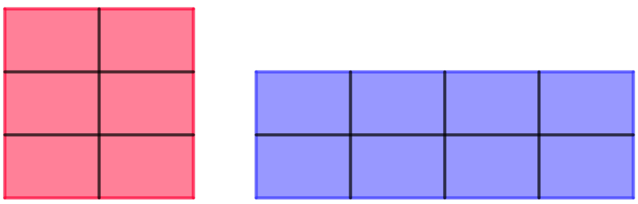
« $\frac{5}{8}$ de disque » se lit « cinq huitièmes de disque »



Ici, le rectangle bleu est fabriqué avec 8 morceaux du carré rouge.
Comment sont faits ces morceaux ? On a découpé le carré rouge en 6 parties égales, qui s'appellent des sixièmes de carré rouge.

On dit que le rectangle bleu est fait avec « huit sixièmes du carré rouge ».

On écrit « $\frac{8}{6}$ de carré rouge »



Pour lire les fractions, les noms des morceaux sont presque tous fabriqués comme ça :

Quand il y a cinq morceaux égaux, on les appelle des cinquièmes.
Quand il y a vingt morceaux égaux, on les appelle des vingtièmes.

Quand il y a cent morceaux égaux, on les appelle des centièmes.
Quand il y a dix morceaux égaux, on les appelle des dixièmes.

Ces noms n'ont pas été très bien choisis puisqu'ils servaient déjà à autre chose.
Si j'arrive sixième dans une course, ça ne veut pas dire que j'ai été découpé en 6 morceaux égaux.
Le dixième jour des vacances dure aussi longtemps que les autres, ce n'est pas un petit morceau.

En général, il n'y a pas de risque de se tromper.

Comme c'est très simple, il y a des exceptions.
Quand on fait deux morceaux égaux, on ne les appelle pas des « deuxièmes », mais des « demis »
Quand on fait trois morceaux égaux, on ne les appelle pas des « troisièmes », mais des « tiers »
Quand on fait quatre morceaux égaux, on ne les appelle pas des « quatrièmes », mais des « quarts »

Trois choix essentiels

Explicitons ici certains choix que nous avons faits concernant l'introduction des fractions sans les justifier et que nous mettons en œuvre également dans les exercices qui suivent.

- Les fractions supérieures à 1 sont introduites dès le début. De cette façon, elles ne présentent pas de difficulté particulière. C'est quand on laisse croire qu'une fraction désigne forcément un morceau de gâteau, donc moins qu'un gâteau qu'il est ensuite difficile de revenir en arrière.

- On explicite systématiquement ce que l'on compte (c'est-à-dire l'unité). On dira par exemple toujours « cinq quarts de carré rouge » ou « deux tiers de bande verte » et non « deux tiers » ou « cinq quarts d'unité ». À l'écrit, il est parfois trop lourd d'expliciter autant, on acceptera donc d'écrire « $\frac{6}{8}$ » et non « $\frac{6}{8}$ de rectangle rouge », l'explicitation se faisant seulement à l'oral.

  On évitera absolument autant à l'écrit qu'à l'oral des formulations telles que « $\frac{6}{8}$ de l'unité » « $\frac{6}{8}$ de u » ou « $\frac{6}{8}$ u ».

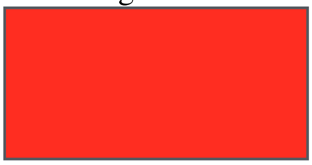
- L'égalité des parts est rappelée très fréquemment, tant dans les explications initiales que dans les exercices proposés. Nous avons constaté souvent dans des classes de CM2 que cette égalité n'allait pas de soi, ou bien qu'elle était mal interprétée.
  Les enfants disent par exemple que si on fait des quarts de gâteau, les quatre parts sont égales « parce que sinon ça ne serait pas juste ».
  On vise à leur faire comprendre que les fractions sont utilisables seulement quand les parts sont égales : on peut fort bien faire quatre parts inégales, mais alors on ne peut pas les appeler des quarts ni utiliser les fractions.

Par ailleurs, nous avons choisi de laisser implicite le fait que la grandeur qu'on partage dans nos exemples est l'aire. Ce n'est pas obligatoire. L'enseignant jugera si expliciter « fraction de l'aire du rectangle modèle » au lieu de « fraction du rectangle modèle » peut aider ou perdre ses élèves.

Un exercice fondamental

Présentation de l'exercice

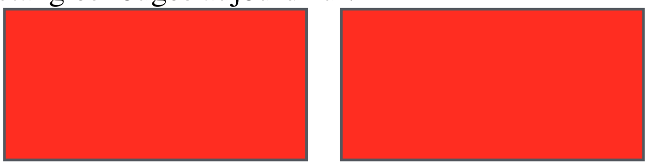
— Aujourd'hui, nous allons compter des rectangles comme celui-ci :



Quand je dirai « rectangle » ou « rectangle rouge », je parlerai toujours de ce rectangle modèle.

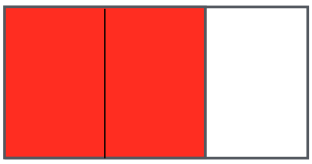
— Je vais vous montrer des collages que j'ai faits en utilisant des rectangles rouges du même modèle, parfois entiers, parfois découpés. Pour chaque collage vous devrez écrire sur votre ardoise combien j'ai utilisé de rectangles comme celui-ci.

Si je vous montre ça, il faudra écrire « 2 rectangles rouges » ou « 2 » tout simplement puisqu'on comptera toujours des rectangles rouges aujourd'hui.



Je vous donne une dernière règle pour aujourd'hui : si je montre ça, il faudra aussi écrire 2, car on ne comptera que le papier rouge que j'ai collé.

Un dernier exemple et puis ça sera à vous de travailler : si je montre ça, il faudra écrire $\frac{2}{3}$

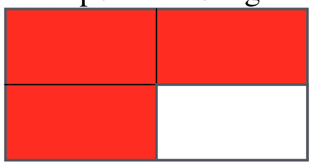


Pour obtenir la partie rouge, j'ai coupé le rectangle modèle en trois parties égales, ce sont des tiers du rectangle modèle.

J'ai utilisé deux de ces parties : « deux tiers » c'est bien ce que dit la fraction $\frac{2}{3}$

Premier cas proposé aux élèves

— C'est à vous de chercher maintenant. Comme d'habitude quand on travaille avec l'ardoise, vous cherchez dans votre tête ce que vous allez écrire, mais vous n'écrivez qu'à mon signal.
Combien ai-je utilisé de rectangles modèles pour ce collage ?



Remarque : pour que les élèves puissent estimer que le rectangle présenté a les mêmes dimensions que le rectangle modèle, celui-ci doit figurer à proximité.
Il doit toutefois être nettement séparé de la figure proposée, dont il ne fait pas partie.

—Écrivez…
—Montrez vos ardoises et ne les baissez pas tout de suite, je recopie au tableau tout ce que je vois.

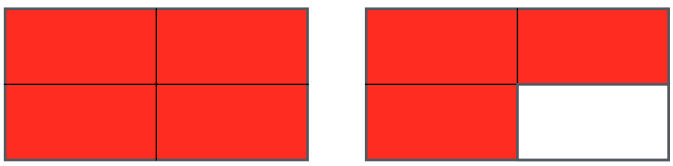
On peut envisager que les réponses suivantes seront proposées : $\frac{3}{4}$ *(ou* $\frac{3}{4}$ *de rectangle)* $\frac{1}{4}$ *, 3.*
L'enseignant rappelle les points suivants :

- *on compte les rectangles modèles utilisé pour le collage, la partie blanche du dessin n'est là que pour aider à comparer au modèle,*
- *le rectangle qu'on utilise pour compter est toujours le modèle du début de séance même s'il y a d'autres rectangles rouges dans la figure (réponse 3).*

Cette correction est faite rapidement, il s'agit que chacun intègre la règle et non d'éléments importants de compréhension des fractions.

L'enseignant propose éventuellement un autre cas très proche comme celui-ci (pour lequel la réponse $\frac{2}{3}$ est évidemment acceptée au même titre que $\frac{4}{6}$)

Très vite, l'enseignant propose un cas de fraction supérieure à 1.
Combien a-t-on utilisé de rectangles modèles pour ce collage ? (rappelons que le rectangle rouge de référence est sur le tableau, à proximité de ce dessin)



L'enseignant écrit au tableau les réponses en explicitant « de rectangle rouge » à chaque fois même si les élèves ne l'ont probablement pas fait.

On obtiendra au moins ces deux réponses : « $\frac{7}{4}$ de rectangle rouge» « $\frac{7}{8}$ de rectangle rouge ».

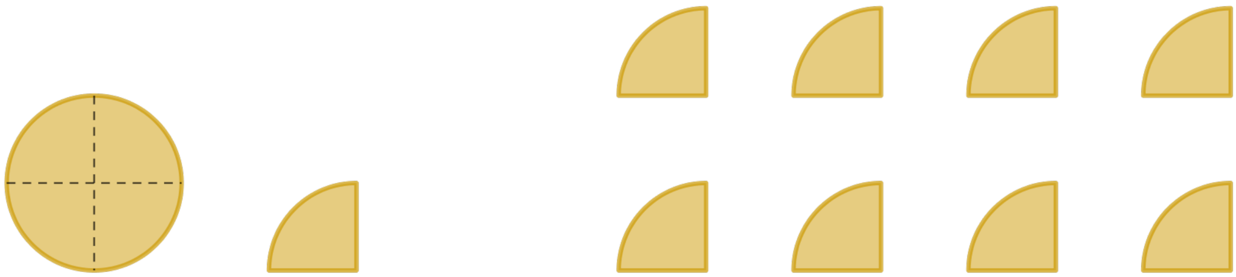
La réponse erronée $\frac{7}{8}$ provient dans la plupart des cas d'un raisonnement proche de ce qui suit :

1. L'élève identifie que les morceaux dessinés sont obtenus en découpant un rectangle rouge en 4 parties égales, il envisage d'écrire un 4 en bas de la fraction.
2. Il compte les morceaux et en trouve 7, ce qui le fait hésiter : quand on partage un gâteau en 4 parts on ne peut pas en prendre 7.
3. L'idée précédente étant très forte, pour se mettre en conformité avec elle il abandonne la référence au rectangle rouge de référence et considère qu'on a partagé l'ensemble constitué de deux rectangles en huit parties égales puis qu'on en a pris sept, d'où la réponse $\frac{7}{8}$

Cette réponse sera probablement moins fréquente si l'enseignant a pris soin, lors de l'introduction des fractions, de présenter des cas supérieurs à 1, mais elle se présentera tout de même.

L'enseignant fait une mise au point sur cette question ressemblant à ceci :

Je crois que certains d'entre vous ont bien vu que le rectangle modèle était partagé en 4 parts égales et que j'avais utilisé 7 morceaux de ce genre, mais qu'ils n'ont pas voulu écrire $\frac{7}{4}$.
Ils ont peut-être pensé que, quand on partage un gâteau en 4, on ne peut pas prendre plus de 4 parts. C'est vrai si on a un seul gâteau, mais imaginez la vitrine d'un pâtissier par exemple, il peut très bien vendre des gâteaux coupés en quarts comme ceci :



un gâteau — un quart de gâteau — encore huit quarts de gâteau

Sur le dessin de droite, il y a $\frac{8}{4}$ de gâteau.

En tout dans l'illustration (en comptant les parts du gâteau entier) il y a $\frac{13}{4}$ de gâteau.

Plus tard, l'enseignant introduit un cas où les parts égales ne sont pas explicitement données.

Contrairement au cas des fractions supérieures à 1 dont des exemples doivent être proposés très vite, l'exemple qui suit peut attendre quelques jours.

Quand les cas précédents sont maîtrisés par la grande majorité des élèves, celui-ci renouvelle l'intérêt tout en rappelant l'importance du critère des parts égales sans lequel on ne peut utiliser l'écriture fractionnaire.
Ces exemples permettent aussi de commencer à se familiariser avec un fait surprenant pour les élèves : deux écritures fractionnaires différentes peuvent désigner le même nombre (alors que l'écriture standard d'un nombre entier dans le système décimal est unique).

— Combien de rectangles modèles rouges ai-je utilisés pour ce collage ?

—Écrivez…

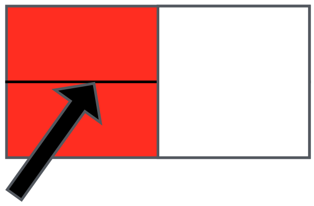
—Montrez vos ardoises, je recopie les réponses : $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{2}$?

J'ai mis le point d'interrogation pour signaler que vous êtes nombreux à ne pas avoir donné de réponse… vous avez peut-être des raisons pour ça

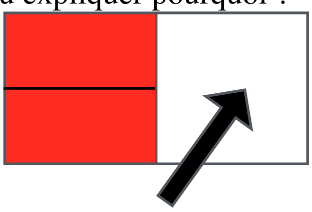
— Qui veut bien expliquer sa réponse ? Zoé qui a répondu deux tiers ?
— J'ai écrit deux sur trois parce que tu as fait trois morceaux et il y en a deux en rouge et deux sur quatre ça va pas parce que tu n'as pas fait quatre morceaux.
— C'est vrai, le rectangle est partagé en trois morceaux et il y en a deux qui sont rouges, mais tu as oublié quelque chose Zoé… d'autres enfants aussi l'ont oublié : le nombre du bas dans une fraction dit combien on a fait de parts **égales** dans un rectangle. Sur ce dessin il n'y a pas trois parts **égales.**

— Julie, tu n'as pas répondu, peux-tu nous dire pourquoi ?
— Justement, les morceaux ne sont pas égaux alors on ne peut pas écrire une fraction, c'est ce que tu nous as dit.
— Si c'est pour ça que tu n'as pas répondu, tu as eu raison, c'est très bien.

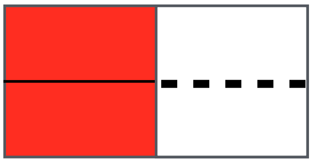
— Cécile, tu as écrit un demi, tu veux bien expliquer pourquoi ?
— Je peux venir montrer ?
— Bien sûr, Cécile, viens au tableau.



— J'ai fait dans ma tête comme si ce trait-là n'y était pas, et alors j'ai vu que c'était la moitié du rectangle qui était rouge, et la moitié, ça s'écrit un sur deux.
— C'est très bien, si on imagine que ce trait horizontal est effacé, le rectangle est partagé en deux parties égales, et il y a une partie rouge, alors on écrit $\frac{1}{2}$, il y a un demi-rectangle rouge sur ce dessin.
Rachid, tu as écrit deux quarts, veux-tu expliquer pourquoi ?



— J'ai fait comme Cécile, sauf que dans ma tête j'ai fait un trait en plus ici, comme ça il y a quatre morceaux tous pareils.
— Dessine le trait dont tu parles pour que tout le monde voie bien.



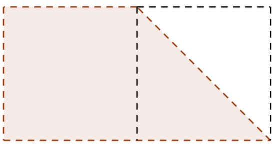
—Très bien, Rachid, c’est une autre façon d'obtenir des morceaux égaux, si on pense à ce trait, le rectangle est partagé en 4 morceaux égaux, et il y en a 2 qui sont rouges, on peut écrire $\frac{2}{4}$, il y a deux quarts de rectangle rouge sur ce dessin.

Remarques :

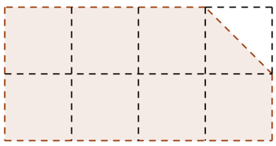
- *Cet exercice est difficile. La première fois où un cas de ce genre est proposé, il se peut qu’aucun élève ne pense à la solution de Cécile où à celle de Rachid, c’est alors l’enseignant qui les donnera, précisant ainsi le contrat : on a le droit de dessiner des traits supplémentaires ou d’imaginer que certains traits sont effacés.*
- *L’enseignant valorisera l’absence de réponse, surtout si comme Julie un élève sait expliquer pourquoi il n’a pas répondu. Mais même une absence de réponse sans justification est préférable à l’oubli d’un des critères essentiels pour l’usage des fractions : les parts doivent être égales.*
- *On ne cherche pas à piéger les élèves, on ne proposera donc jamais de découpage en parts proches, mais pas égales : des parts qui semblent égales sur le dessin le sont.*

Dans les exercices suivants, vous ferez bien attention à faire comme Cécile ou Rachid. Vous pouvez effacer des traits dans votre tête ou en rajouter pour avoir des parts toutes égales, et si vous n'arrivez pas à faire des parts égales, vous pouvez répondre avec un point d’interrogation pour dire que vous ne savez pas écrire avec une fraction combien il y a de rectangles.

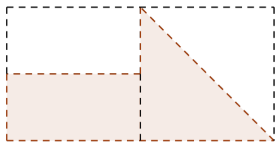
D’autres figures proposant des difficultés analogues



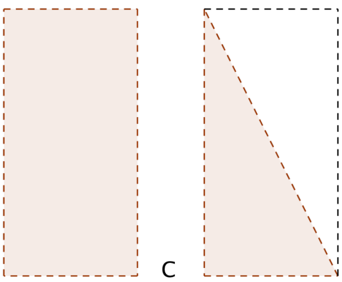
A



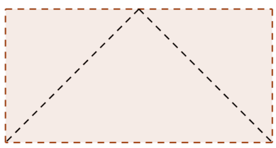
B



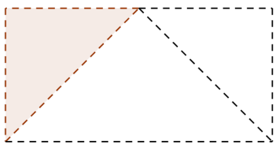
E

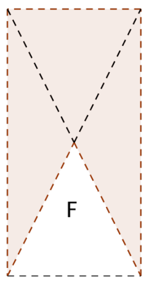


C



D





F

Pour tous ces exemples, une propriété devra être mise en évidence à l'avance si elle n'est pas déjà connue des élèves : une diagonale d'un carré ou d'un rectangle partage cette figure en deux triangles identiques (superposables).

Le cas E comporte une difficulté particulière : les deux quarts de rectangle modèle coloriés n'ont pas la même forme.
L'enseignant mettra en évidence les points suivants :

- s'il n'y avait que des morceaux rectangulaires identiques, on n'hésiterait pas à dire que ce sont des quarts du rectangle modèle. Même chose pour la partie triangulaire. Le fait que les deux formes soient présentes sur la même figure n'empêche pas que ce soient des quarts.
- La partie colorée et la partie non coloriée sont constituées des mêmes morceaux, elles sont donc égales, on peut donc considérer que la partie coloriée est un demi du rectangle modèle.
- Il est aussi possible de découper en morceaux plus petits pour que tous les morceaux aient la même forme.

Le cas F pose un problème géométrique intéressant : la partie coloriée est constituée de trois triangles dont deux sont identiques. Le troisième est identique au triangle resté blanc. Mais tout cela ne prouve pas que les quatre parts sont égales : deux parts qui n'ont pas la même forme peuvent être égales comme dans l'exemple E, mais elles ne le sont pas toujours. Qu'en est-il ici ? Les quatre triangles sont-ils égaux ? La réponse à cette question s'obtient en partageant le rectangle modèle en huit petits triangles identiques. Chacun des triangles de la figure F en contient deux.