# Mise en équation d'un problème

Le plus souvent, les candidats au CRPE ont le choix de la méthode pour résoudre les problèmes qui leur sont posés. Il arrive cependant que le sujet impose une "méthode algébrique", ce qui revient à dire qu'il faut traduire l'énoncé du problème par une ou plusieurs équations.
Il arrive aussi que la méthode algébrique soit tout simplement pratique et efficace.

Cette page développe à l'aide de quelques exemples l'idée suivante :

Quand on a peu l'habitude d'utiliser l'algèbre, l'utilisation de lettres pour désigner les nombres gêne l'intuition et rend difficile une bonne compréhension du problème. Faire un essai préalable avec des nombres simples et écrits en chiffres permet à la fois de mieux comprendre le problème et de le traduire facilement par une équation.

**Premier exemple :**

**Paul a 5 fois l'âge de son fils. Dans 8 ans, Paul aura le triple de l'âge de son fils. Quel âge a Paul ?**

Choisissons **au hasard** un âge pour Paul, et faisons les calculs nécessaires pour savoir si cet âge est le bon :

Supposons que l'âge de Paul est 50 ans
alors l'âge de son fils est 50 : 5
Dans 8 ans, l'âge de Paul sera 50 + 8
Dans 8 ans l' âge du fils de Paul sera (50 : 5) + 8

L'âge choisi au départ n'est pas le bon, car 50 + 8 n'est pas le triple de (50 : 5) + 8.
En effet, le triple de 18 est 54 et non 58.

On peut résumer cet essai et la vérification qui conclue que 50 n'est pas le nombre qu'on cherche par l'expression suivante :

$$50 + 8 \neq 3\left(\frac{50}{5} + 8\right)$$

Ce qu'on a fait avec le nombre 50, on pourrait aussi bien le faire avec 30, 48 ou 45. Remplacer les nombres écrits en chiffres par une lettre permet en quelque sorte de faire en une seule fois tous ces essais.

Il suffit pour ça de remplacer le nombre 50 de l'essai par une lettre (on utilise souvent ) et de recopier les étapes que l'on a écrites avec 50.

On obtient ceci :

Supposons que l'âge de Paul est $x$ ans

alors l'âge de son fils est $x : 5$

Dans 8 ans, l'âge de Paul sera $x + 8$
Dans 8 ans l' âge du fils de Paul sera $\frac{x}{5} + 8$

Pour la plupart des valeurs de $x$, $x + 8$ n'est pas le triple de $\frac{x}{5} + 8$

Si $x + 8$ est le triple de $\frac{x}{5} + 8$, c'est-à-dire si $x + 8 = 3\left(\frac{x}{5} + 8\right)$, alors l'âge de Paul est précisément celui qu'on cherche.

Tout le travail qui précède, plus ou moins détaillé, se fait au brouillon.
L'usage est de ne pas expliquer comment on a traduit le problème par une équation.
Sur la copie, ce qui suit suffirait :

Soit $x$ l'âge de Paul (en années), on a alors : $x + 8 = 3\left(\frac{x}{5} + 8\right)$

Rappelons que le brouillon n'est pas une version peu soignée de la copie, mais un outil de recherche dont le contenu peut être très éloigné de la solution rédigée.

Pour que la méthode de l'essai numérique permette facilement d'obtenir l'équation, il est important de s'imposer une contrainte un peu inhabituelle.
Voici une nouvelle version de l'essai numérique qui ne respecte pas cette contrainte :

Supposons que l'âge de Paul est 50 ans alors l'âge de son fils est 10 ans
Dans 8 ans, l'âge de Paul sera 58 ans
Dans 8 ans l' âge du fils de Paul sera 18 ans

L'âge choisi au départ n'est pas le bon, car 58 n'est pas le triple de 18

Avec la première version la réflexion sur la structure du problème, sur les relations qui lient les nombres en jeu, se faisait dans un cadre numérique familier permettant à l'intuition de se développer, il suffisait ensuite de recopier les expressions trouvées à l'aide de 50 en remplaçant 50 par $x$.

Pour écrire l'équation à partir de la deuxième version il faudrait refaire en utilisant la lettre $x$ les raisonnements déjà faits avec l'exemple numérique... c'est précisément ce qu'on veut éviter.

La méthode que nous proposons ne peut donc être efficace que si, dans le cadre de l'exemple numérique, on s'impose à chaque étape d'écrire l'opération effectuée et non son résultat. Par exemple, on écrit que l'âge du fils est 50 : 5 et non 10.

**Deuxième exemple :**

**On dispose de deux rectangles. La longueur de chaque rectangle est supérieure de 8 cm à sa largeur.**
**La largeur du grand rectangle est supérieure de 15 cm à celle du petit rectangle.**
**Le périmètre du grand rectangle est le triple du périmètre du petit.**

**Calculer les dimensions des deux rectangles.**

Supposons que le petit rectangle a une largeur (mesurée en cm) de 5
Sa longueur est alors 5 + 8 et son périmètre est 5 + 5 + 8 + 5 + 5 + 8, ou 4 x 5 + 16

La largeur du grand rectangle 5 + 15, sa longueur est 5 + 23
Son périmètre peut s'écrire (en simplifiant un peu) 4 x 5 + 76
5 n'est pas la bonne valeur parce que 4 x 5 + 76 n'est pas le triple de 4 x 5 + 16

Si, à la place de 5 cm, on choisit une valeur $x$ pour la largeur du petit rectangle, les périmètres se calculent en prenant modèle sur ce qu'on a fait à partir de 5 cm.

Le périmètre du petit rectangle est $4\,x + 16$. Celui du grand rectangle est $4\,x + 76$

Pour la plupart des valeurs de $x$, $4\,x + 76$ n'est pas le triple de $4\,x + 16$. Il existe une exception, c'est précisément la valeur de $x$ qu'on cherche.

Sur la copie, on peut maintenant écrire :

Appelons la largeur du petit rectangle (en cm). On a alors 4 x + 76 = 3(4 x + 16)

**Troisième exemple.**

**Deux robinets permettent de remplir une même cuve.**
**Le premier robinet, seul, remplit la cuve en 15 minutes.**
**Le second robinet, seul, remplit la cuve en 25 minutes.**
**Si on ouvre simultanément les deux robinets, en combien de temps la cuve se remplit-elle ?**

Supposons que les robinets soient ouverts pendant 10 minutes :
Le premier robinet remplit $\frac{1}{15}$ de la cuve en une minute donc $\frac{10}{15}$ de la cuve en 10 minutes.

le second robinet remplit $\frac{10}{25}$ de la cuve en 10 minutes.

La durée de 10 minutes n'est pas celle qui convient parce que 10/15 de la cuve plus 10/25 de la cuve, ça ne fait pas la cuve entière. $10/15 + 10/25 \neq 1$

Pour traduire le problème par une équation, il suffit d'écrire, en recopiant les expressions élaborées pour l'exemple numérique, que si la durée d'ouverture n'était pas 10, mais $x$, alors la somme des fractions de cuve remplies par chaque robinet serait égale à un (c'est-à-dire une cuve entière).

Sur la copie, on peut maintenant écrire :

Soit $x$ la durée en minutes du remplissage, on a : $\frac{x}{15} + \frac{x}{25} = 1$