# Aires et longueurs sur un quadrillage

Certains des problèmes d'optimisation que nous proposons demandent de savoir comparer des aires ou des longueurs de figures tracées sur un quadrillage.

Parfois, les figures en jeu sont tracées sur les lignes du quadrillage ce qui ne pose aucune difficulté particulière. Dans d'autres cas, seuls les sommets des figures sont placés sur les nœuds du quadrillage. Les comparaisons sont alors difficiles en cycle 3.

Ce document présente les principales idées nécessaires pour effectuer les comparaisons d'aires ou de longueurs nécessaires dans ces problèmes.

Nous avons choisi des formulations utilisables avec des élèves de cycle 3.

Néanmoins il ne s'agit pas d'un cours sur la question directement utilisable avec les élèves, un tel cours nécessiterait de multiplier les exemples, de solliciter la participation des élèves...

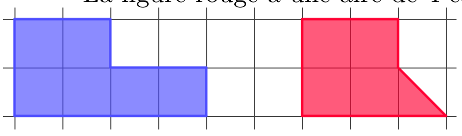
## L'aire

L'aire d'une figure, c'est le nombre de carreaux qu'il faut pour la recouvrir.

Remarque : en réalité, ce qu'on définit ainsi n'est pas l'aire mais *la mesure de l'aire si on prend le carreau pour unité*. Cette inexactitude nous semble acceptable : elle permet de donner de l'aire une définition simple et n'entraine pas de conceptions erronées difficiles à corriger.

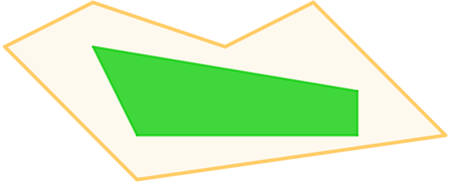
— La figure bleue a une aire de 6 carreaux.

— La figure rouge a une aire de 4 carreaux et demi.



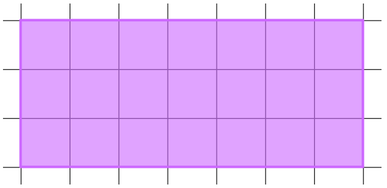
Dans certains cas, on n'a pas besoin de compter les carreaux pour comparer les aires de deux figures :

L'aire de la figure orange est plus grande que celle de la figure verte : elle contient tous les carreaux qui sont dans la figure verte, plus d'autres autour de la figure verte.



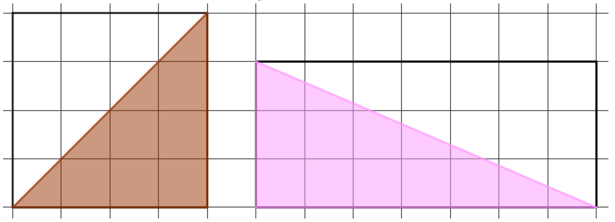
L'aire d'un rectangle ou d'un carré tracé sur les traits du quadrillage est facile à calculer : s'il y a 5 rangées de 3 carreaux la figure contient 5 fois trois carreaux. S'il y a 6 rangées de 6 carreaux, la figure contient 6 fois 6 carreaux.

Ce rectangle contient 7 rangées de 3 carreaux. $7 \times 3 = 21$. Son aire est de 21 carreaux.



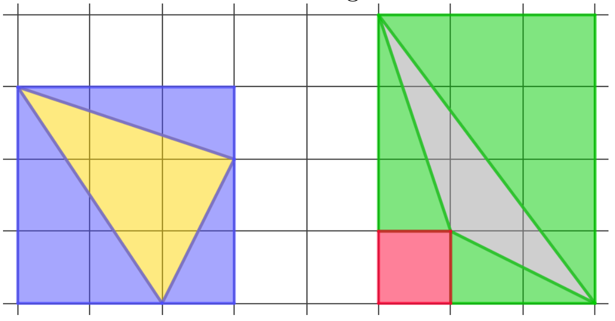
Quand on trace une diagonale d'un rectangle ou d'un carré, on le partage en deux triangles rectangles identiques. Comme ils sont identiques, chaque triangle contient la moitié des carreaux qui recouvrent la figure. L'aire de chaque triangle est égale à la moitié de celle du rectangle ou du carré.

— L'aire du triangle marron est de 8 carreaux (la moitié de 16).
— L'aire du triangle rose est de 10 carreaux et demi (la moitié de 21).



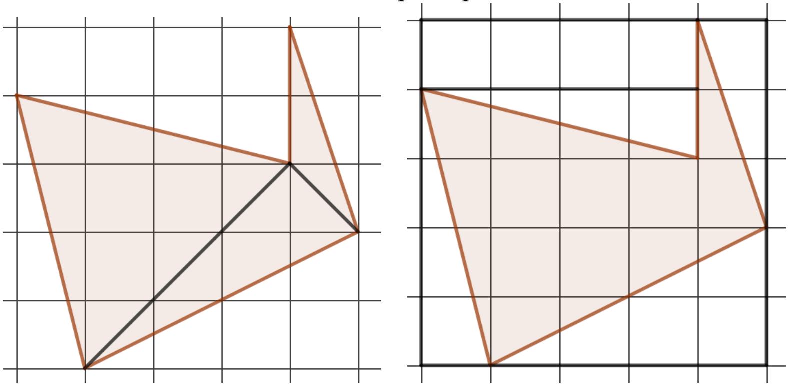
Pour trouver l'aire d'un triangle dont les sommets sont sur les nœuds d'un quadrillage, on peut dessiner autour du triangle un rectangle ou un carré puis enlever les morceaux en trop.

— Pour calculer l'aire du triangle jaune on cherche l'aire du carré puis on soustrait les aires des trois triangles bleus.
— Pour calculer l'aire du triangle gris on cherche l'aire du grand rectangle puis on soustrait les aires des trois triangles verts et celle du carré rouge.



Puisqu'on sait trouver l'aire de n'importe quel triangle tracé en se servant du quadrillage, on sait trouver l'aire de nimporte quel polygone, car on peut toujours découper un polygone en triangles.

— Pour trouver l'aire de ce pentagone, on peut le découper en trois triangles, calculer l'aire de chaque triangle puis la somme des trois aires.
— On peut aussi tracer un carré autour du pentagone, calculer l'aire du carré et soustraire l'aire totale des morceaux qui dépassent.



Cette façon de calculer l'aire d'un polygone dont les sommets sont les nœuds de la grille permet de montrer que cette aire est toujours un nombre entier de carreaux ou bien un nombre entier plus un demi carreau.

Ainsi, dans les problèmes que nous posons, il ne peut pas se produire de cas difficile où deux aires sont très proches sans toutefois être égales. Il n'en va pas de même pour les périmètres des polygones (ou pour la longueur d'autres lignes brisées). Il est parfois très difficile avec les outils de l'école élémentaire de décider laquelle de deux lignes brisées est la plus longue.

## Comparer des longueurs de lignes brisées

Dans plusieurs problèmes, il faut comparer des longueurs obtenues en additionnant les longueurs de plusieurs segment (pour trouver le périmètre d'un polygone ou la longueur d'un réseau de routes).

On abordera ces problèmes avec l'outil dont on dispose : la règle graduée. Très vite, la règle ne suffit plus à conclure.

En effet, si on effectue les mesures avec soin, on peut considérer que l'erreur sur un seul côté est inférieure à un mm, mais l'erreur sur la somme de plusieurs côtés peut être plus importante.

Par ailleurs, il se peut que l'une des valeurs à comparer soit sous évaluée et l'autre surévaluée ce qui fausse plus encore la comparaison.

Considérons deux triangle, A et B dont les côtés mesurent précisément :

54,7 mm 56,7 mm et 54,6 mm pour A

50,4 mm 71,3 mm et 45,3 mm pour B

En mesurant au mieux à la règle graduée, on obtiendrait les valeurs suivantes :

55 mm 57 mm et 55 mm pour A

50 mm 71 mm et 45 mm pour B

On conclurait que le périmètre de A est le plus grand des deux car il mesure 167 mm et celui de B 166 mm. C'est l'inverse qui est vrai.

Pour avoir des comparaisons fiables, il faut donc connaître avec plus de précision la longueur de chacun des segments.

**Première solution : aggrandir les figures.** La diagonale d'un carré de 1 cm de côté mesure environ 14 mm.

La diagonale d'un carré de 20 cm de côté mesure environ 283 mm. En divisant cette valeur par 20, on obtient une valeur approchée d'environ 14,15 mm pour la longueur de la diagonale du carré d'un cm de côté.

Cette méthode n'est valable que si on effectue les mesures sur des figures précises, par exemple en se servant d'un quadrillage produit industiellement (feulles quadrillées 5x5 par exemple).

Si on construisait le carré de 20 cm de côté sur papier blanc les imprécisions dues à la construction s'ajouteraient à celles de la mesure et le résultat obtenu ne serait pas fiable du tout.

L'aggrandissement ne permet donc pas d'améliorer beaucoup la précision des mesures.

**Deuxième solution : fournir une table de valeurs.** Elle donne la longueur de la diagonale d'un rectangle tracé en suivant les lignes d'un quadrillage.

Nous fournissons dans un fichier joint une feuille de tableur donnant la longueur des segments utiles en cm (avec quatre chiffres après la virgule) ou en microns (il faut expliquer qu'il s'agit d'une longueur minuscule : il faut 1000 microns pour faire un millimètre) ce qui permet de n'utiliser que des nombres entiers.

Il faut indiquer dans la cellule rouge la longueur d'un côté de carreau des feuilles quadrillées utilisées (en mm). Ce sera presque toujours 5, 8 ou 10.

Voici la table en centimètres pour des carreaux de 10 mm de côté :

| Longueur des côtés en cm | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,4142 | 2,2361 | 3,1623 | 4,1231 | 5,099 | 6,0828 | 7,0711 | 8,0623 | 9,0554 | 10,0499 |
| 2 | 2,2361 | 2,8284 | 3,6056 | 4,4721 | 5,3852 | 6,3246 | 7,2801 | 8,2462 | 9,2195 | 10,198 |
| 3 | 3,1623 | 3,6056 | 4,2426 | 5 | 5,831 | 6,7082 | 7,6158 | 8,544 | 9,4868 | 10,4403 |
| 4 | 4,1231 | 4,4721 | 5 | 5,6569 | 6,4031 | 7,2111 | 8,0623 | 8,9443 | 9,8489 | 10,7703 |
| 5 | 5,099 | 5,3852 | 5,831 | 6,4031 | 7,0711 | 7,8102 | 8,6023 | 9,434 | 10,2956 | 11,1803 |
| 6 | 6,0828 | 6,3246 | 6,7082 | 7,2111 | 7,8102 | 8,4853 | 9,2195 | 10 | 10,8167 | 11,6619 |
| 7 | 7,0711 | 7,2801 | 7,6158 | 8,0623 | 8,6023 | 9,2195 | 9,8995 | 10,6301 | 11,4018 | 12,2066 |
| 8 | 8,0623 | 8,2462 | 8,544 | 8,9443 | 9,434 | 10 | 10,6301 | 11,3137 | 12,0416 | 12,8062 |
| 9 | 9,0554 | 9,2195 | 9,4868 | 9,8489 | 10,2956 | 10,8167 | 11,4018 | 12,0416 | 12,7279 | 13,4536 |
| 10 | 10,0499 | 10,198 | 10,4403 | 10,7703 | 11,1803 | 11,6619 | 12,2066 | 12,8062 | 13,4536 | 14,1421 |

Voici la table en microns pour des carreaux de 10 mm de côté :

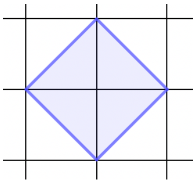
| Longueur des côtés en cm | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 14142 | 22361 | 31623 | 41231 | 50990 | 60828 | 70711 | 80623 | 90554 | 100499 |
| 2 | 22361 | 28284 | 36056 | 44721 | 53852 | 63246 | 72801 | 82462 | 92195 | 101980 |
| 3 | 31623 | 36056 | 42426 | 50000 | 58310 | 67082 | 76158 | 85440 | 94868 | 104403 |
| 4 | 41231 | 44721 | 50000 | 56569 | 64031 | 72111 | 80623 | 89443 | 98489 | 107703 |
| 5 | 50990 | 53852 | 58310 | 64031 | 70711 | 78102 | 86023 | 94340 | 102956 | 111803 |
| 6 | 60828 | 63246 | 67082 | 72111 | 78102 | 84853 | 92195 | 100000 | 108167 | 116619 |
| 7 | 70711 | 72801 | 76158 | 80623 | 86023 | 92195 | 98995 | 106301 | 114018 | 122066 |
| 8 | 80623 | 82462 | 85440 | 89443 | 94340 | 100000 | 106301 | 113137 | 120416 | 128062 |
| 9 | 90554 | 92195 | 94868 | 98489 | 102956 | 108167 | 114018 | 120416 | 127279 | 134536 |
| 10 | 100499 | 101980 | 104403 | 107703 | 111803 | 116619 | 122066 | 128062 | 134536 | 141421 |

Les mesures fournies par ces tables sont plus précises que celle obtenues à la règle, mais ne sont malgré tout que des approximations.

Il est important de le dire aux élèves.

Le carré ci-dessous a une aire égale à 2 carreaux du quadrillage (quatre moitiés de carreau). Si les carreaux du quadrillage ont des côtés de 1 cm, l'aire du carré bleu est donc de 2 centimètres-carrés.

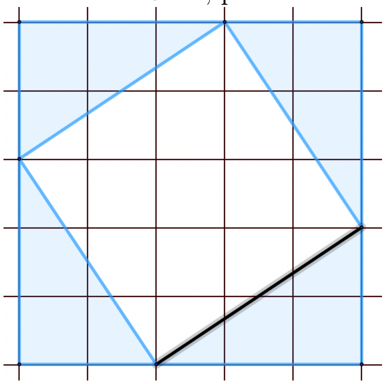
Si on calcule la même aire en utilisant la longueur côté du carré bleu fournie par la table, on effectue 1,4142 $\times$1,4142 ... ce qui ne donne pas 2.



Certains élèves seront peut-être curieux de savoir comment ces tables sont construites.
L'enseignante peut alors proposer de calculer collectivement un des nombres de la table.
Ce travail ne peut être effectué que si les élèves :

- savent multiplier entre eux deux nombres décimaux,
- savent que le calcul de l'aire d'un carré en multipliant la longueur d'un côté par lui même (facile à comprendre quand la mesure d'un côté est entière) reste valide quand cette mesure n'est pas entière.

On choisit le segment dont on veut calculer la longueur, par exemple la diagonale d'un rectangle de 2 cm sur 3 cm, puis on suit les étapes suivantes :



- Tracer, sur papier quadrillé, un carré dont le segment choisi est un côté.
- Déterminer l'aire de ce carré comme indiqué plus haut dans la partie sur les aires : 13 centimètres carrés.
- Déterminer par essais successifs la mesure du côté :
  - Si le côté mesurait 3 cm, l'aire serait de 9 centimètres carrés : 3 cm est trop petit.
  - Si le côté mesurait 4 cm, l'aire serait de 16 centimètres carrés : 4 cm est trop grand. la mesure cherchée est comprise entre 3 cm et 4 cm.
  - Si le côté mesurait 3,4 cm, l'aire serait de 11,56 centimètres carrés : 3,4 cm est trop petit.
  - Si le côté mesurait 3,6 cm, l'aire serait de 12,96 centimètres carrés : 3,6 cm est trop petit.
  - Si le côté mesurait 3,7 cm, l'aire serait de 13,69 centimètres carrés : 3,7 cm est trop grand. la mesure cherchée est comprise entre 3,6 cm et 3,7 cm.
  - Si le côté mesurait 3,61 cm, l'aire serait de 13,0321 centimètres carrés : 3,61 cm est trop grand. la mesure cherchée est comprise entre 3,60 cm et 3,61 cm.

L'enseignante peut répartir les opérations à poser entre les élèves.
Au stade où l'on teste des nombres à un chiffre après la virgule, deux ou trois élèves effectuent $3,1 \times 3,1$ d'autres $3,2 \times 3,2$ et ainsi de suite jusqsu'à $3,9 \times 3,9$.
En effectuant les opérations de $3,601 \times 3,601$ à $3,609 \times 3,609$, on constate que le segment mesure entre 3,605 et 3,606 cm.