Période 5

Vers la multiplication

Matériel.

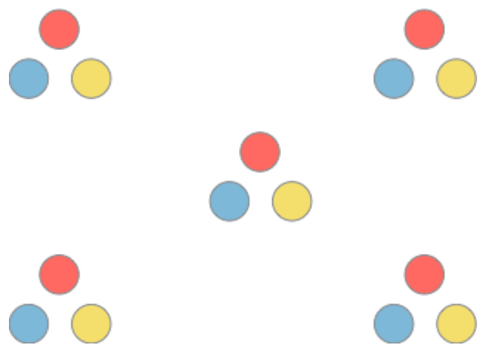
Pour l'enseignant : aimants de tableau

Pour les élèves : selon les phases, une ardoise par groupe, une feuille grand format par binôme, brouillon individuel.

Déroulement

Phase 1

L'enseignant place au tableau 15 aimants disposés comme ceci :



— Il y a des groupes de trois aimants (il les montre) : trois ici, trois ici, trois ici, trois ici et encore trois là.
En tout il y a trois plus trois plus trois plus trois plus trois aimants (il écrit 3+3+3+3+3).

— Il y a 5 aimants rouges, 5 jaunes et 5 bleus (il écrit 5+5+5).

L'écriture 3+3+3+3+3 raconte une façon de compter tous les aimants du tableau.
L'écriture 5+5+5 aussi raconte une façon de compter tous les aimants du tableau.

— Que je compte d'une façon ou de l'autre il y a toujours autant d'aimants, alors cette phrase mathématique dit la vérité.
Il écrit 3+3+3+3+3 = 5+5+5.

L'enseignant recommence en écrivant au tableau des lettres dans cette disposition :

A S C M   A S C M

A S C M

Il conclut que la phrase 4+4+4 = 3+3+3+3 est vraie parce que 4+4+4 et 3+3+3+3 sont deux façons de compter les mêmes lettres.

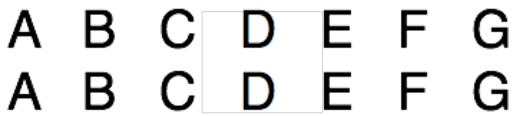
L'enseignant fait une troisième démonstration pour conclure, en dénombrant les ronds par lignes puis par colonnes, que cette phrase est vraie :

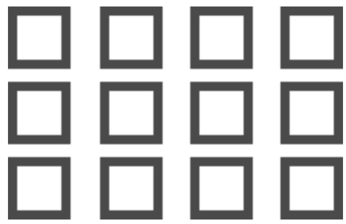
6+6+6 = 3+3+3+3+3+3

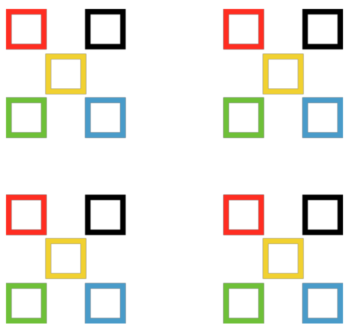
Les illustrations et les égalités correspondantes demeurent présentes au tableau.

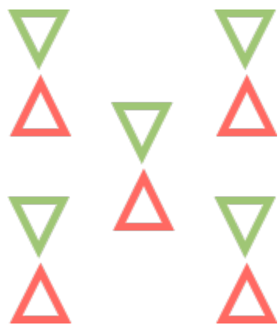
Phase 2

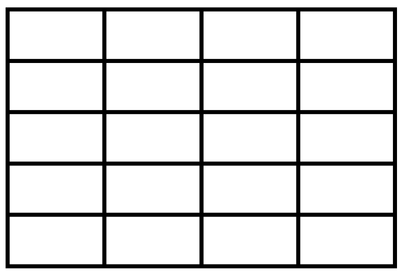
Les élèves travaillent par groupes de 3 ou 4 l'un d'entre eux étant désigné pour écrire la réponse collective sur l'ardoise.
L'enseignant réalise une collection au tableau et demande aux élèves d'écrire une phrase mathématique vraie qui parle de cette collection.
Voici quelques exemples de dispositions possibles pour cette phase :











Parmi les phrases vraies proposées par les élèves, certaines sont propices au travail d'approche de la multiplication, comme 7 + 7 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 ou 5 + 5 + 5 + 5= 4 + 4 + 4 + 4 + 4.
D'autres propositions comme 6 + 6 = 4 + 4 + 4, bien qu'elles soient vraies, ne pourront pas être utilisées pour la suite du travail. Au moment de la mise en

commun, l'enseignant les note au tableau comme les autres. C'est seulement avant de passer à la phase 3 qu'il les efface en disant que le travail qui suit ne peut pas se faire avec ces phrases… mais que ceux qui les ont trouvées ont bien travaillé, ils ne pouvaient pas savoir si ces phrases seraient utiles ou pas.

Phase 3

Toutes les égalités utilisées lors des phases précédentes sont écrites au tableau. Les élèves, par groupes de 3 ou 4, sont invités à faire des remarques sur ce qui est écrit. Un rapporteur est désigné dans chaque groupe pour la mise en commun des remarques.
Les deux remarques suivantes peuvent être faites :

- Dans chaque phrase, de chaque côté du signe =, tous les nombres qui s'ajoutent sont égaux.
- S'il y a des 5 d'un côté, alors il y a 5 nombres de l'autre. S'il y a des 3 d'un côté alors il y a 3 nombres de l'autre… De cette façon, s'il y a quatre trois d'un côté, il y a trois quatre de l'autre. Quatre fois trois, c'est autant que trois fois quatre.

La première remarque sera probablement faite par beaucoup d'élèves.
En revanche dans de nombreuses classes ils ne réussiront pas à formuler clairement la seconde. Si certains élèves perçoivent cette propriété, mais ont du mal à l'exprimer, l'enseignant reformulera leurs propositions.
Si nécessaire fera la remarque lui-même.

L'enseignant reprend ensuite une à une les égalités figurant au tableau et les commente :
Pour 6+6+6 = 3+3+3+3+3+3 il dira :
un, deux, trois, ici il y a trois fois six.
Un, deux, trois, quatre, cinq, six, ici il y a six fois trois.
Trois fois six, c'est autant que six fois trois.

Phase 4

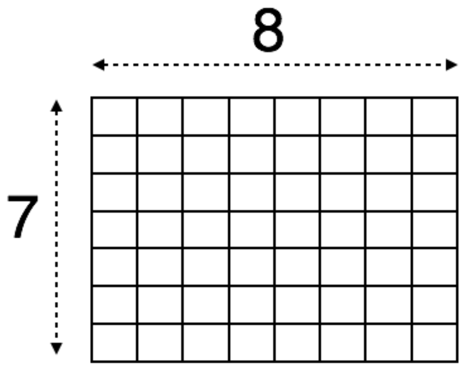
L'enseignant rappelle ce qui a été vu précédemment : on a vu beaucoup de phrases fabriquées sur le même modèle qui disent la vérité. Il reprend quelques exemples déjà vus.
Trois fois cinq c'est autant que cinq fois trois (il écrit au tableau 5+5+5 = 3+3+3+3+3).
Deux fois quatre, c'est autant que quatre fois deux (il écrit 4+4 = 2+2+2+2)
Six fois trois, c'est autant que trois fois six (il écrit 3+3+3+3+3+3 = 6+6+6)

— Je me pose une question : si j'invente au hasard une phrase du même genre, est-ce qu'elle est vraie ?
Par exemple, si j'écris que sept fois huit c'est autant que huit fois sept, est-ce que c'est vrai ?

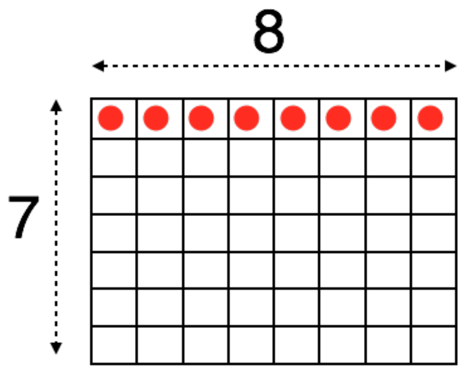
?

8+8+8+8+8+8+8 = 7+7+7+7+7+7+7+7

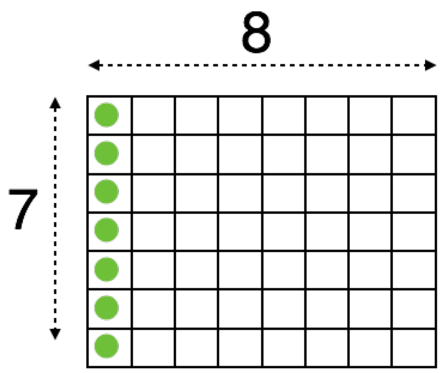
L'enseignant laisse les élèves réfléchir à cette question, fait exprimer quelques avis puis explique comment il sait que cette phrase est vraie à l'aide d'un quadrillage de 8 cases sur 7.



Pour écrire combien il y a de cases dans ce tableau, je peux me servir des lignes.
Dans chaque ligne il y a 8 cases, comme les 8 aimants rouges que j'ai mis sur la ligne du haut.
Comme il y a 7 lignes, en tout, il y a sept fois huit cases (il écrit 8+8+8+8+8+8+8)



Pour écrire combien il y a de cases dans ce tableau, je peux me servir des colonnes.
Dans chaque colonne il y a 7 cases, comme les 7 aimants verts que j'ai mis sur la colonne de gauche.
Comme il y a huit colonnes, en tout, il y a huit fois sept cases (il écrit 7+7+7+7+7+7+7+7)



J'ai trouvé deux façons de dire combien il y a de cases dans le même tableau, alors ces deux écritures parlent du même nombre, elles valent autant, elles sont égales.
Je peux enlever le point d'interrogation sur ma phrase du début, elle est vraie.

8+8+8+8+8+8+8 = 7+7+7+7+7+7+7+7

— Je pourrais inventer beaucoup d'autres phrases sur le même modèle, par exemple (seulement à l'oral) :
"six fois treize, c'est autant que treize fois six"
"douze fois dix, c'est autant que dix fois douze"
"vingt fois sept c'est autant que sept fois vingt"
"trente-cinq fois vingt-trois, c'est autant que vingt-trois fois trente-cinq"

Et bien ces phrases sont toutes vraies, et toutes les autres qu'on pourrait fabriquer sur le même modèle sont vraies aussi. Vous pouvez faire confiance aux savants mathématiciens qui ont étudié cette question depuis longtemps, mais si vous avez encore un doute, je vous propose de choisir une phrase du même genre, bien compliquée si vous voulez, et je vous montrerai qu'elle est vraie. Qui veut proposer une phrase ?

L'enseignant retient une phrase qui semble particulièrement compliquée aux élèves comme "trente-sept fois quarante-deux c'est autant que quarante-deux fois trente-sept".
Il remet à la séance suivante l'explication promise pour se donner le temps de préparer le matériel.

Il apporte à la séance suivante trois rectangles de 42 carreaux sur 37 tracés sur du papier quadrillé 5X5. L'un est vierge, le deuxième comporte une ligne colorée, le troisième une colonne colorée. L'enseignant reprend exactement la même explication qu'avec le tableau 7x8 pour conclure que "trente-sept fois quarante-deux c'est autant que quarante-deux fois trente-sept"… sans écrire les additions correspondantes.

Phase 5

— Nous avons appris reconnaitre et à écrire beaucoup de phrases mathématiques qui disent la vérité, comme celles-ci (il énonce oralement et écrit au tableau les exemples qui suivent)
"dix fois trois, c'est autant que trois fois dix"
3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 10 + 10 + 10

"deux fois vingt, c'est autant que vingt fois deux"
20 + 20 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2

"huit fois sept, c'est autant que sept fois huit"
7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8

Vous pensez peut-être que c'est juste une curiosité, que ça ne sert pas à grand-chose… si vous pensez ça, vous vous trompez.
Parfois, un des deux côtés du signe égal est beaucoup plus facile à calculer que l'autre. Par exemple 10 + 10 + 10 c'est trente, c'est très facile alors qu'additionner tous les trois qu'il y a de l'autre côté ce ne serait pas très agréable.
20 + 20, c'est quarante, c'est plus facile que d'additionner tous les deux.
C'est vrai qu'il y a aussi des fois où aucun des deux côtés n'est très commode comme dans "sept fois huit c'est autant que huit fois sept".

Sur la feuille que je vais vous donner, il y a des additions que je vous demande de calculer. Vous avez le droit de calculer l'addition comme je l'ai écrite, mais en général, si vous écrivez d'abord une phrase vraie du genre de celles qu'on vient de voir, ce sera plus facile.

Si je vous propose
3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 =
Vous pouvez penser 3 et 3 c'est 6, et encore 3 c'et 9… et continuer comme ça mais vous pouvez aussi vous dire "tiens tiens, c'est onze fois trois, alors c'est autant que trois fois onze et vous écrivez

3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 11 + 11 + 11 = 33

Quelques exemples :

2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 =

2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 =

3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 =

8 + 8 + 8 + 8 + 8 =

4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 =

6 + 6 + 6 + 6 + 6 =

2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 =