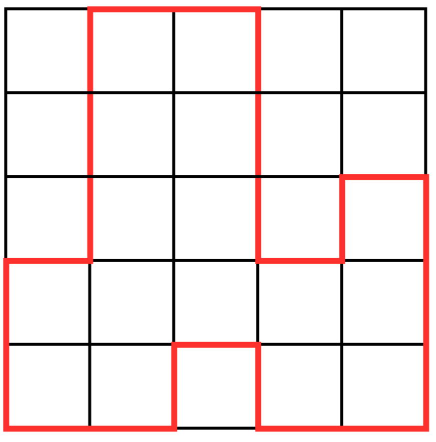
Le grand périmètre.

En bref

Tracer sur une grille un polygone ayant le plus grand périmètre possible.

Introduction du problème

Sur les lignes d'une grille carrée de 5 carreaux de côté, vous allez tracer un polygone, par exemple celui-ci

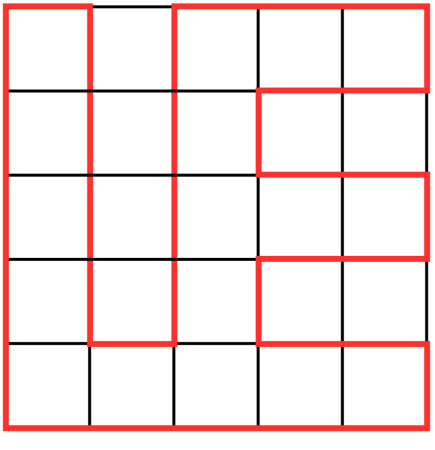


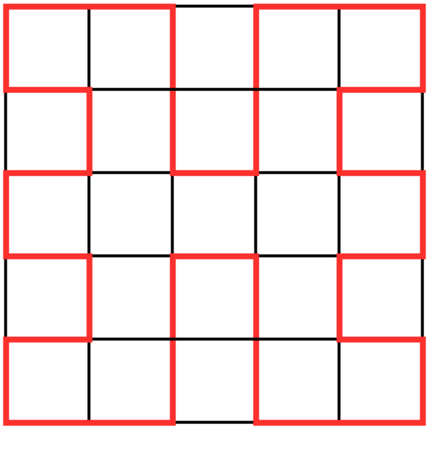
Le périmètre de ce polygone est égal à 24. (l'unité de longueur est le côté d'un carreau de la grille)

Le périmètre de votre polygone doit être le plus grand possible. Vous pouvez faire plusieurs essais

Après quelques minutes, l'enseignante demande quelles valeurs ont été trouvées pour le périmètre du polygone. Il affiche ou reproduit en plus grand quelques figures correspondant au plus grand périmètre annoncé et demande aux élèves de vérifier que le calcul du périmètre est correct.

Voici un affichage dans une classe où deux élèves affirment avoir trouvé un périmètre égal à 36.





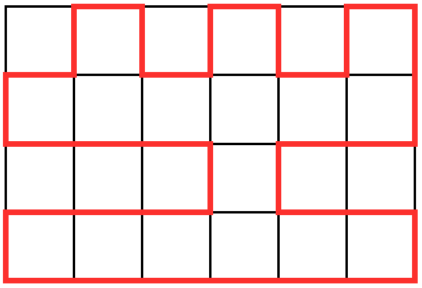
Dans tous les cas, quelle que soit la valeur maximale proposée dans la classe, l'enseignante donne un nouveau temps de recherche pour essayer d'améliorer cette valeur. Le maximum possible étant 36 (ce qu'on ne dit surtout pas aux élèves à ce stade) si cette valeur a déjà été trouvée la recherche d'une amélioration ne dure qu'environ 5 minutes.

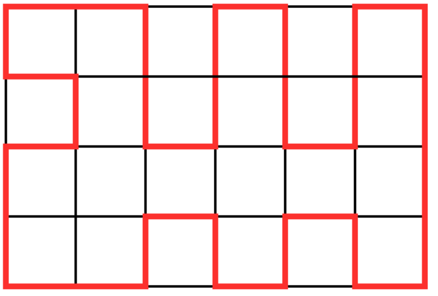
Éléments de relance

La découverte de polygones de périmètre 36 est généralement assez rapide et ne nécessite pas de relance particulière.

En revanche, après avoir prouvé (comme indiqué ci-dessous) que l'on ne peut pas obtenir un périmètre supérieur à 36, l'enseignante peut proposer de chercher le même problème sur une grille rectangulaire de 6 carreaux sur 4.

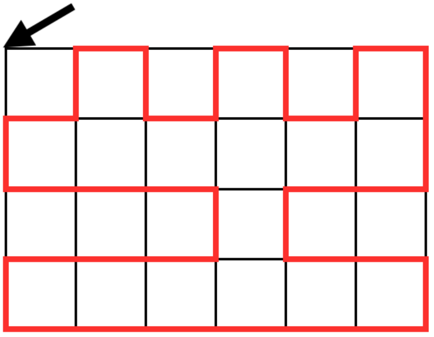
Grâce à l'expérience du problème précédent, les élèves trouveront rapidement des polygones ayant un périmètre de 34, par exemple ceux-ci :

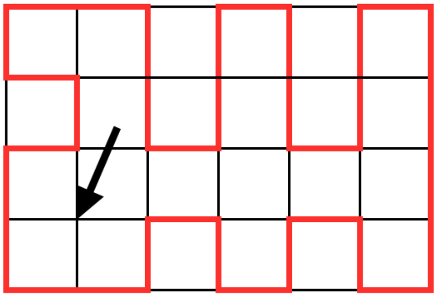




L'enseignante rappelle alors la preuve utilisée pour le problème précédent : le périmètre du polygone est égal au nombre de nœuds sur lequel il passe. Sur cette nouvelle grille, il y a 35 nœuds.

L'enseignante fait remarquer que sur chacun des exemples proposés il y a un nœud « oublié », sur lequel on ne passe pas.





Elle relance un bref temps de recherche : essayez de passer sur tous les nœuds. Si quelqu'un y parvient et obtient ainsi un périmètre de 35, il le signale tout de suite. Le problème sera alors terminé, car on sait déjà que personne ne pourra faire mieux que 35.

Éléments de preuve

Pour la grille carrée

L'enseignante fait constater qu'on ne progresse plus : de nouvelles façons d'obtenir un périmètre égal à 36 sont éventuellement trouvées, mais personne ne réussit à faire mieux.

Elle indique que cette situation peut s'expliquer d'une des deux façons suivantes :

1. Trouver un polygone avec un périmètre plus grand que 36 est difficile, il faut pour y parvenir inventer une disposition astucieuse à laquelle on n'a pas encore pensé, mais c'est possible. En cherchant bien quelqu'un finira par en trouver un.
2. Trouver un polygone avec un périmètre plus grand que 36 est impossible. Même en cherchant très longtemps et même en se faisant aider par des mathématiciens professionnels ou des ordinateurs personne n'y arrivera jamais.

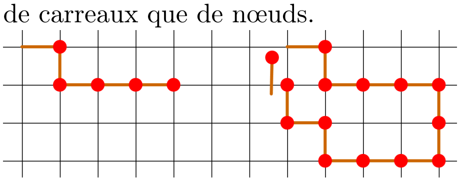
Elle peut demander aux élèves de choisir entre les deux possibilités précédentes et une troisième : « Je ne sais pas s'il est possible de trouver un polygone avec un périmètre plus grand que 36 ».

Ce type de sondage est instructif pour l'enseignante : à ce stade si les élèves s'appuyaient seulement sur des connaissances objectives, ils devraient tous répondre « je ne sais pas ». C'est rarement le cas.

Il faut cependant être très prudent et expliquer avec insistance qu'il ne s'agit pas d'un vote. Le but est d'informer l'enseignante sur ce que pensent ses élèves, pas de décider de la vérité. La majorité peut se tromper.

L'enseignante explique l'encadré ci-dessous.

On réalise un polygone avec des allumettes toutes identiques (les tiges sont les côtés de carreaux, les têtes sont les nœuds). Chaque allumette a une tige et une tête. Quand le polygone est terminé, il y a autant de tiges que de têtes. En faisant le tour du polygone, on passe sur autant de côtés de carreaux que de nœuds.



Si un polygone a un périmètre de 24, il passe sur 24 nœuds, s'il a un périmètre de 36, il passe sur 36 nœeuds.
Sur la grille que nous utilisons, il y a exactement 36 nœuds, il n'existe donc pas, sur cette grille, de polygone ayant un périmètre supérieur à 36.

Pour la grille de 6 carreaux sur 4

L'enseignante peut à nouveau demander à ses élèves de choisir entre trois affirmations :

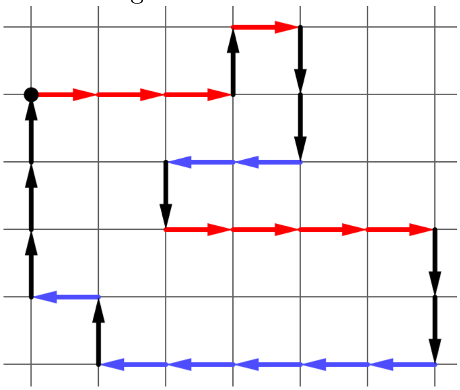
1. Obtenir un périmètre égal à 35 est difficile, mais c'est possible.
2. Obtenir un périmètre égal à 35 est impossible (même pour des savants. . .).
3. Je ne sais pas s'il est possible d'obtenir un périmètre de 35.

Elle peut laisser le problème ouvert.

Si elle souhaite le clore, elle peut s'appuyer sur l'explication suivante :

Choisissons un des sommets du polygone comme point de départ et faisons le tour du polygone. Chaque côté de carreau sur lequel on passe peut être rangé dans une des catégories suivantes :

— catégorie D : les côtés de carreau sur lesquels on passe en allant vers la Droite (en rouge sur l'exemple)
— catégorie G : les côtés de carreau sur lesquels on passe en allant vers la Gauche (en bleu)
— catégorie H : les côtés de carreau sur lesquels on passe en allant vers le Haut
— catégorie B : les côtés de carreau sur lesquels on passe en allant vers le Bas.



Il y a autant de côtés dans la catégorie D que dans la catégorie G. En effet, si on se déplace plus vers la droite que vers la gauche (ou le contraire) on ne peut pas revenir exactement au point de départ. Or pour trouver le périmètre en comptant les côtés de carreau, il faut faire le tour complet et revenir au point de départ.
Le nombre de côtés de carreau au total des catégories D et G est le double du nombre dans la catégorie D, c'est un nombre pair.
Pour les mêmes raisons, dans les catégories H et B il y a en tout un nombre pair de côtés de carreau.
Quand on additionne deux nombres pairs, on obtient un nombre pair. Le périmètre de la figure (en utilisant comme unité le côté de carreau) est un nombre pair.
Puisque le périmètre d'un polygone tracé sur la grille est un nombre pair, il ne peut pas être égal à 35.

Aménagements pour le cycle 2

Il sera nécessaire d'expliquer ou de rappeler que le périmètre, c'est la longueur du trait qui fait le tour d'une figure.

L'utilisation du côté d'un carreau de la grille comme unité de longueur présente plusieurs avantages :

— le périmètre est le même sur les figures des élèves et sur les agrandissements réalisés au tableau ou projetés par l'enseignante.
— Il n'est pas nécessaire d'utiliser un outil de mesure, le comptage sur la figure suffit.

En revanche ce choix peut conduire à des ambiguïtés. Il arrivera à l'enseignante ou aux élèves de dire « carreau » à la place de « côté de carreau » pour alléger le discours… mais certains élèves risquent alors de compter réellement des surfaces et non des segments.

En CE1 il nous semble préférable de s'en tenir à la grille 5x5 et de laisser le problème ouvert.

En CE2 on peut envisager de clore le problème sur grille 5x5, et éventuellement de travailler sur grille 6x4 en laissant cette fois le problème ouvert.