Contextes pour les problèmes numériques

Avant-propos : un présupposé à questionner.

Quand on pose un problème à quelqu'un, il semble aller de soi que la personne qui cherche à le résoudre va essayer de fournir une réponse vraie.

C'est pourtant loin d'être certain.
J'ai donné pendant une quinzaine d'années des cours de mathématiques à des groupes de candidats au CRPE. En début d'année, un étudiant sur deux trouvait légitime (en mathématiques, et seulement en mathématiques) de fournir des réponses auxquelles il ne croyait pas lui-même.

Une des premières étapes du travail consistait à préciser ce qu'est une erreur :

- Quand j'affirme quelque chose que je crois vrai, mais qui ne l'est pas, je commets une erreur. Je peux par exemple avoir mal interprété la question, avoir oublié un élément, avoir fait un calcul erroné… les erreurs possibles sont nombreuses, mais ce n'est jamais grave : l'erreur fait partie du processus d'apprentissage.
- En revanche, si j'affirme quelque chose alors que je ne pense pas que cette affirmation est vraie, ce n'est pas une erreur, mais une bêtise (j'utilisais avec mes étudiants un terme plus cru).

Les étudiants en question étaient pourtant des personnes cultivées, intelligentes, motivées et globalement en réussite dans leurs études. Ils étaient seulement en mauvais termes avec les mathématiques.
La situation est probablement pire pour une population ayant moins d'atouts.

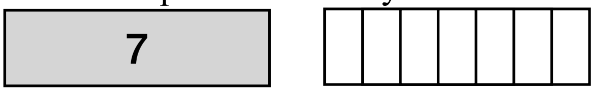
Les propositions qui suivent ont pour but de créer à l'école élémentaire, dans le domaine des problèmes numériques, une attitude intellectuelle saine.
Il s'agit pour l'essentiel de faire en sorte que les élèves essaient de dire le vrai et non de trouver la bonne opération.

Contextes pour des problèmes numériques

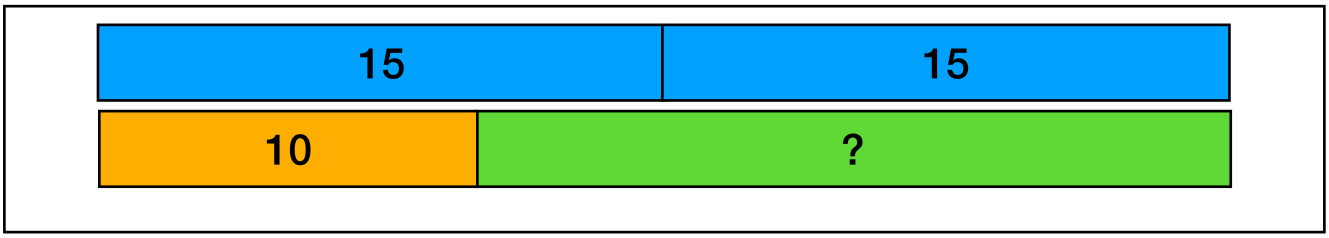
Un contexte utilisable dès le cycle 2 : les bandes quadrillées

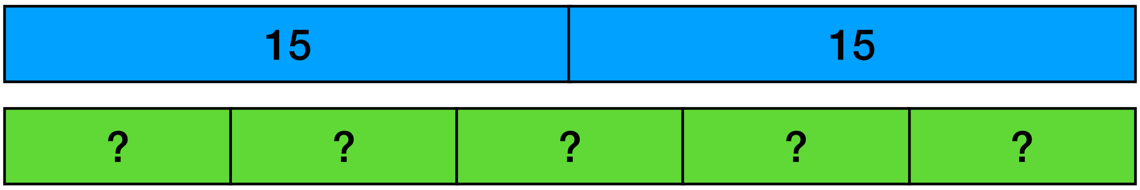
L'enseignant fixe sur le tableau des bandes de papier de différentes longueurs.
Sur chaque bande est écrit un nombre.

Il montre, en retournant quelques bandes, que leurs dos sont quadrillés.
Les cases sont identiques sur toutes les bandes.
Le nombre écrit sur la bande indique combien il y a de cases au dos.



Beaucoup de problèmes peuvent alors se poser sous la forme qui suit.





Toutes les bandes vertes sont identiques.

Quand les élèves ont répondu, pour savoir si la réponse est correcte, il suffit de retourner la bande inconnue et de compter les cases.

Qu’appelons-nous contexte ?

Nous appelons contexte l’ensemble constitué d’un matériel (par exemple les bandes quadrillées) et de problèmes posés à propos de ce matériel.

Dans l’idéal, un contexte doit permettre :

> De valider les réponses proposées de façon immédiate en les confrontant au matériel (par exemple en comptant les cases d’une bande).
>
> De poser des problèmes rapidement, en utilisant un texte simple et bref, ou pas de texte du tout.
>
> De poser des problèmes variés quant à leur contenu mathématique.

Objets réels ou objets fictifs

Résoudre un problème numérique, c’est le plus souvent trouver un nombre (un nombre d’objets, une mesure de longueur, une somme d’argent…) auquel on ne peut pas accéder par la simple observation : les objets à dénombrer ou à mesurer ne sont pas disponibles.

Deux raisons principales peuvent rendre le comptage ou la mesure impossibles :

- Les objets étudiés sont cachés par l’enseignant. Ils sont présents dans la classe, mais on ne pourra les compter ou les mesurer qu’après avoir résolu le problème.

- Les objets étudiés n’existent pas. Le problème posé raconte une histoire fictive.

La façon de valider (ou d’infirmer) les réponses diffère nettement :

- Dans le premier cas, pour savoir si ce que l’on a prévu est vrai, on compte les billes que l’on devait dénombrer, on pèse l’objet dont on cherchait la masse, on mesure une longueur… La réponse fournie est vraie : elle correspond à la vérité observée.

- Dans le second cas, c’est le raisonnement ou le calcul effectué pour déterminer le résultat qui se justifie lui-même : il y a 75 billes dans la boite , ou bien la pierre pèse 720 grammes parce que c’est ce que j’ai calculé et que mon calcul est correct. C’est l’autorité morale du maitre, ou d’un élève performant, ou de la majorité qui décide si la réponse est correcte.

Pour Cécile, à l'aise avec les mathématiques, le sens des opérations, ça n'a peut-être pas beaucoup d'importance… mais qu'en est-il pour Paul, moins performant dans ce domaine ?

- Si Paul a calculé qu'une pierre réelle, mais cachée pèse 200 g et que la balance dit 720 g, il sait tout de suite que sa réponse n'est pas vraie. Il peut ensuite chercher à quel endroit il a fait une erreur, il peut aussi essayer de s'approprier les procédures de ceux qui ont prévu que la pierre pèse 720 g. Ces deux approches sont des sources possibles de progrès.

- Si la pierre n'existe pas, Paul écoute les explications de l'enseignant ou de ses camarades sans savoir si sa réponse est correcte… il n'est pas très motivé pour les comprendre puisque, jusqu'au dénouement, il espère « avoir bon ».
  Si Paul a trouvé 200 g au lieu de 720 g à cause d'une étourderie ou d'une erreur de calcul, l'exposé d'une solution correcte peut suffire pour qu'il rectifie. Mais si l'erreur vient d'une incompréhension plus profonde de la situation étudiée, Paul doit accepter qu'un calcul est meilleur que le sien sans comprendre pourquoi, simplement parce que c'est ce que l'enseignant dit.

Un contrat didactique sain

Quand les problèmes portent tous, ou presque, sur des situations fictives, cela contribue à développer des attitudes fâcheuses classiques. Certains élèves cherchent surtout à deviner l'attente de l'enseignant ou la « bonne opération ». Beaucoup sont passifs pendant les corrections (ou les mises en commun, les synthèses), attendant surtout de savoir s'ils « ont juste ».

Même en cycle 3, proposer des problèmes portant sur des objets réels, pour lesquels la réponse trouvée peut-être confrontée à la réalité (et pas seulement aux explications de l'enseignant ou des camarades) favorise l'installation d'un contrat didactique sain. Ce contrat, si on l'explicitait, ressemblerait à ceci :

- Résoudre un problème, ça sert à savoir combien il y a de choses quand on ne les voit pas, qu'on ne peut pas les compter ou les mesurer.
- Pour ça, il faut réfléchir. On peut se servir de ce qu'on sait sur les nombres, et sur les opérations.
- Certains problèmes sont difficiles, c'est normal de ne pas savoir résoudre tous les problèmes. Quand on ne sait pas, il vaut mieux dire qu'on ne sait pas plutôt que de répondre au hasard.
- Quand on pense avoir trouvé, le maitre montre les choses. Comme ça, on sait si ce qu'on a trouvé est vrai ou pas. Si ce n'est pas vrai, on cherche à quel endroit on s'est trompé : ça peut être quelque chose qu'on n'a pas bien compris, ou une erreur d'opération.

Cela ne veut pas dire qu'il faut élaborer une chartre de la résolution de problèmes… il faut seulement que la pratique de la classe soit aussi cohérente que possible avec les points énoncés ci-dessus.

Limites et avantages annexes

Établir un contrat didactique sain ne résout pas toutes les difficultés.
Cela ne dispense d'apprendre ni le sens des opérations ni leur technique. Mais cela évite de créer artificiellement des obstacles inutiles.

Les problèmes posés à propos d'objets réels utilisent en général très peu de texte écrit. Quels effets cela a-t-il ?

Dans une séance de problèmes classique, l'enseignant est confronté à un dilemme :
- soit il prend le temps nécessaire pour que l'énoncé soit compris par tous ses élèves, au risque que le travail sur la lecture remplace celui sur les mathématiques (rappelons qu'on ne commence à faire des mathématiques que quand on a compris ce qu'on cherche),
- soit il privilégie la quantité de travail mathématique en écourtant au maximum la phase d'explications, au risque de pénaliser les petits lecteurs qui, ne pouvant interpréter correctement l'énoncé, ne feront pas du tout de mathématiques.

Dans leur pratique quotidienne, les enseignants que j'ai pu observer faisaient de leur mieux pour trouver des compromis, expliciter suffisamment l'énoncé sans trop amputer le temps de recherche… cela restait très difficile.
Si les énoncés utilisent très peu de texte écrit, ce dilemme disparait.

Par ailleurs, le travail sur la lecture des énoncés de problème est-il vraiment profitable du point de vue de l'enseignement de la lecture ? Je n'en suis pas certain. L'inquiétude liée à l'enjeu (si je ne comprends pas bien, je vais encore me tromper et rater mon travail de maths) empêche la sérénité favorable au progrès.

Voici un dernier avantage des problèmes posés à propos d'objets réels : il n'est pas nécessaire de changer toutes les habitudes de la classe. On peut utiliser un contexte pendant quelques séances et s'en tenir là. Quand on revient à des problèmes fictifs, l'enseignant précise que, même s'il n'y a plus d'objets pour vérifier, il faut encore tenter de dire des choses vraies.
Pour certains élèves, cela suffit à provoquer un changement d'attitude.

En revanche, il n'est pas judicieux de poser un seul problème isolé, issu d'un des contextes proposés ici. La familiarisation avec le matériel prend du temps. Ce temps est largement regagné si, comme nous le proposons ici, un contexte est utilisé pour poser de nombreux problèmes. Si l'on en pose un seul, on risque, comme dans les séances consacrées aux problèmes posés à l'aide d'un texte, de faire très peu de mathématiques dans la séance.

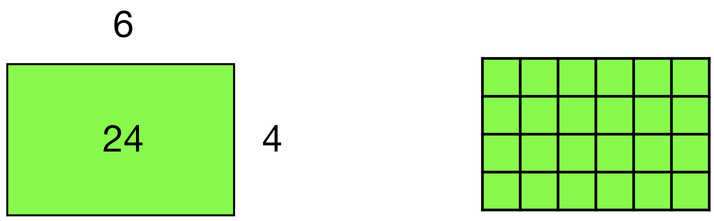
Quelques contextes.

Les bandes quadrillées

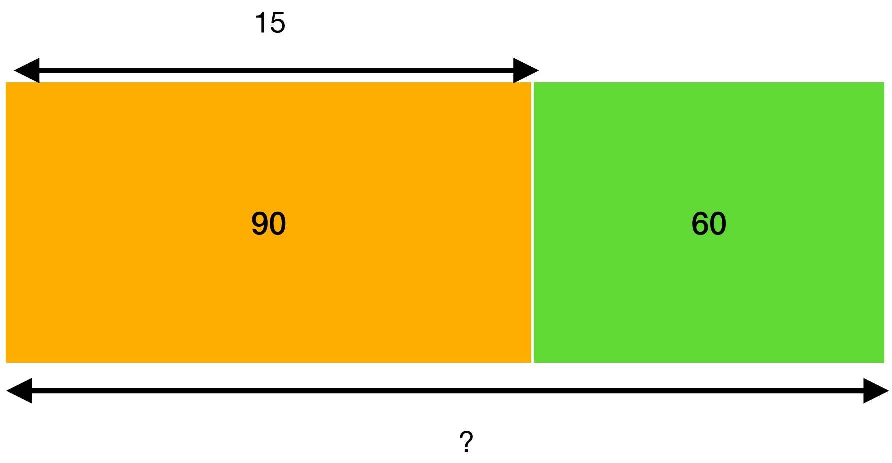
Nous donnons de nombreux exemples de problèmes dans ce contexte dans la partie du site consacrée au cycle 2.

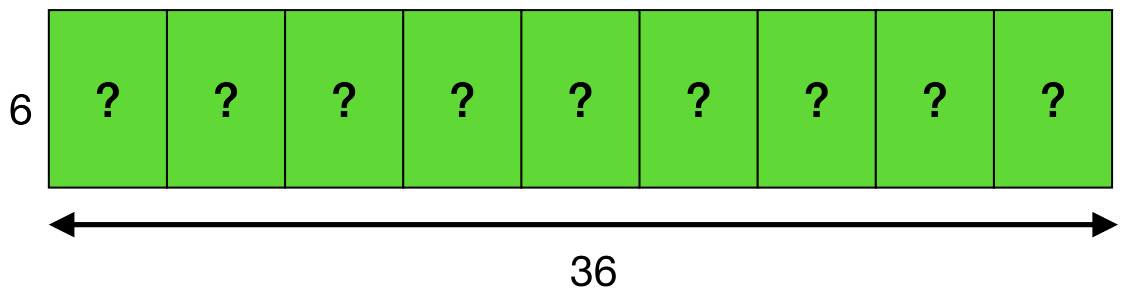
Les rectangles quadrillés

Les bandes du contexte précédent sont remplacées par des rectangles comme celui-ci. Chaque rectangle peut comporter jusqu'à trois indications numériques, mais elles ne sont généralement pas toutes fournies.

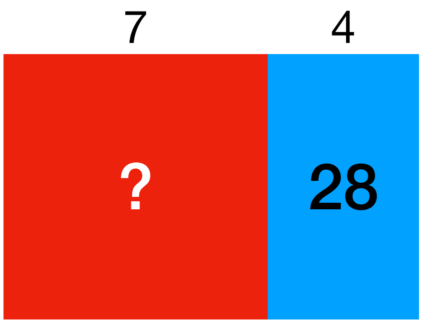


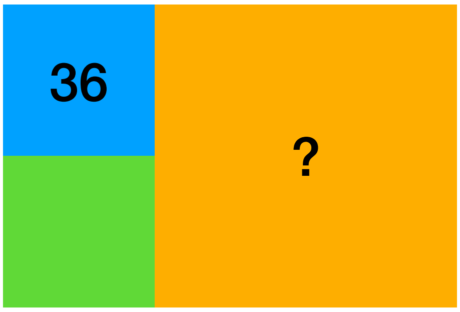
Exemples de problèmes dans ce contexte.



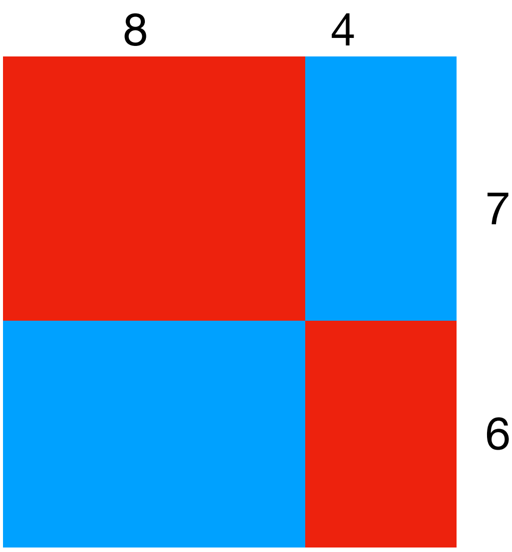


Tous les rectangles verts sont identiques.





Les trois morceaux sont des carrés.



Y a-t-il plus de carreaux rouges ou de carreaux bleus ?

Cette figure est-elle un carré ?

Plaidoyer pour des outils de mesure rustiques

Pour les contextes faisant intervenir une grandeur continue (longueur, masse), il nous semble préférable d'utiliser des outils simples comme la balance de Roberval, la règle ou le mètre à ruban.
Ces outils permettent en effet d'évoquer facilement l'unité utilisée : un objet pèse trente grammes s'il équilibre trente petites masses d'un gramme, une longueur de cent-vingt-sept centimètres, c'est comme cent-vingt-sept petits segments d'un centimètre mis bout à bout.

Le télémètre à laser (on en trouve maintenant pour une trentaine d'euros), la balance électronique ou même la balance mécanique à cadran ne facilitent pas ces évocations.

Par ailleurs, les instruments de mesure électroniques donnent une impression d'exactitude illusoire. Si je pèse une pièce de jeu de construction sur ma balance électronique, elle indique que cette pièce pèse douze grammes (ou bien qu'elle pèse treize grammes), alors que la balance de Roberval montre clairement qu'elle pèse plus que douze grammes, mais moins que treize.

La validation des problèmes dans les contextes liés à la mesure est plus difficile que quand on dénombre des objets.
Si je place bout à bout 20 baguettes identiques longues de 30 cm, il n'est pas impossible que le mètre ruban indique une longueur totale de 599 cm. Il peut y avoir plusieurs raisons à cela : les baguettes ne sont pas parfaitement identiques, elles ne mesurent pas exactement 30 cm, elles ne sont pas placées parfaitement bout à bout, la mesure totale est erronée…
Cela ne doit pas conduire à abandonner le souci de validation, mais à comprendre que la mesure est par nature entachée d'imprécision.
C'est pour cela que les scientifiques donnent des mesures assorties d'un intervalle d'incertitude : 254 cm ± 1cm.

Bien sûr, ce n'est pas facile à gérer, mais rencontrer des objets qui pèsent plus que 12 g mais moins que 13 g est une excellente motivation pour aborder les fractions et/ou les décimaux.

Les bandes de carton

Note sur la préparation matérielle.

En découpant à la cisaille un rectangle de carton léger de 17 cm de large, on obtient rapidement un grand nombre de bandes de 17 cm.

Exemples de problèmes dans ce contexte.

Nous donnons par paresse seulement un texte écrit, sans photo ni description détaillée de la mise en scène. Dans la classe, on fera évidemment une démonstration : on montre les bandes, on les place bout à bout…

> Voici 12 bandes de carton identiques.
> Je les place bout à bout pour obtenir une grande bande.
> Je mesure cette grande bande au mètre ruban : elle mesure 276 cm
> Quelle est la longueur d'une petite bande ?
>
> Je fais deux grandes bandes : une avec 23 bandes de 17 cm, l'autre avec 16 bandes de 24 cm. Quelle bande sera la plus longue ?
>
> J'ai des bandes de carton de 22 cm. Je les mets bout à bout à travers la classe.
> La largeur de la classe mesure 632 cm (on utilise bien sûr la mesure réelle).
> Combien de bandes pourrai-je placer ?
>
> La classe mesure 9 m 24 cm de long. Je place bout à bout des bandes de 72 cm.
> Quand je ne pourrai plus placer de bandes, quelle longueur restera-t-il entre le bout de la dernière bande et le mur de la classe ?
>
> J'ai des bandes de carton qui mesurent 17 cm et d'autres qui mesurent 21 cm.
> Je voudrais faire deux grandes bandes exactement de la même longueur : une avec seulement des bandes de 17 cm et l'autre avec seulement des bandes de 21 cm. Est-ce possible ? Comment s'y prendre ?
>
> Avec des bandes de 26 cm, j'ai fait une grande bande de 8 m et 6 cm.
> Combien de petites bandes ai-je utilisées ?
>
> 15 bandes identiques mises bout à bout mesurent 285 cm.
> Combien mesurent 10 bandes ?

On peut aussi reprendre dans ce contexte tous les problèmes du contexte « bandes quadrillées » en remplaçant le dénombrement des cases par la mesure de longueur.

Masses

Exemples de problèmes dans ce contexte.

Cette pomme pèse 210 g.

Ce livre pèse 620 g.

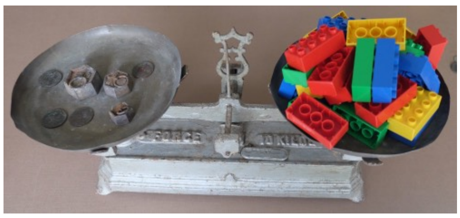
Quelle masse faut-il poser sur l'autre plateau pour équilibrer la balance ?

Quelle masse faut-il poser à côté de la pomme pour équilibrer la balance ?

La pomme du problème précédent et dix pièces identiques de Duplo pèsent ensemble 335 g.

Combien pèse une pièce de Duplo ?

Ces dix pièces identiques pèsent 125 g.



Toutes ces pièces pèsent 395 g.

Combien y a-t-il de pièces sur la deuxième photo ?

11 petites pièces équilibrent 6 grandes pièces.
Proposez d'autres façons d'équilibrer la balance avec de grandes pièces et des petites.

La monnaie

Mettre en place une validation indépendante des procédures utilisées pour résoudre le problème est moins évident pour ce contexte que pour les précédents.

Quelques problèmes dans ce contexte.

On joue en classe une situation avec de la monnaie fictive.
Natacha achète à Johann un objet qui coûte 37 € et un autre qui coûte 28 €. Elle paye avec deux billets de 50 euros.
Natacha a donné trop d'argent à Johann. Il va lui en rendre. Combien ?

Pour la validation, on échangera les billets de 50 € contre des billets et des pièces de moindre valeur jusqu'à pouvoir isoler trois sommes : une de 37 €, une de 28 € et tout le reste. Ce reste est ce que Johann a reçu en plus du prix demandé, c'est ce qu'il doit rendre.
C'est la seule façon que nous connaissons de valider sans faire référence à la procédure utilisée pour résoudre le problème.

La directrice d'une école achète 12 dictionnaires à 17,40 € chacun et 12 atlas à 13,60 € chacun. Combien a-t-elle dépensé en tout ?

Valider consiste à matérialiser les vingt-quatre sommes nécessaires à l'achat des livres (en mettant à contribution toute la classe, ce n'est pas trop fastidieux) puis à faire des échanges de façon à diminuer le nombre de pièces et de billets afin de lire facilement la somme totale.

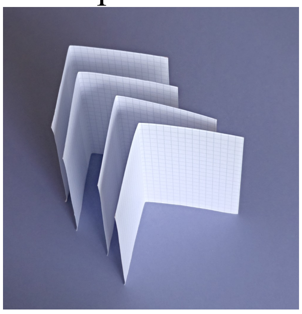
Tous les problèmes portant sur des achats que l'on trouve dans les manuels peuvent à priori être rendus validables, à condition de procéder, au moment de la validation, à autant d'échanges que nécessaire pour que la somme cherchée soit représentée par de la monnaie de façon facile à évaluer.

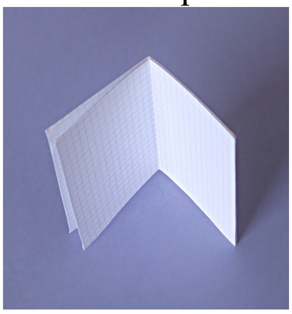
Les pages numérotées d'une revue.

Les revues que l'on utilise doivent avoir les caractéristiques suivantes :
Les pages sont numérotées.
La page numéro 1 est la couverture. Son numéro n'est généralement pas imprimé, mais la première page de droite à l'intérieur doit être numérotée 1 et non 3.
Beaucoup de revues sont numérotées selon ce principe, on s'en procurera un certain nombre (revues de mots croisés ou de sudokus, programmes de télévision…).
Phase 1 : fabrication.

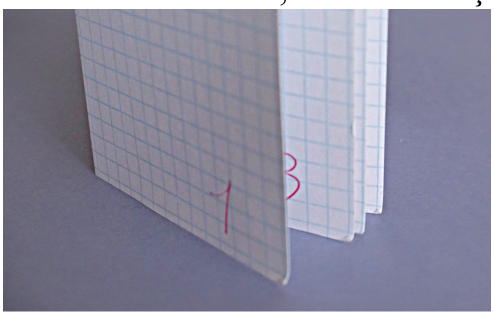
Pour faire comprendre le principe de numérotation, on peut proposer aux élèves de fabriquer un cahier numéroté selon le même principe.

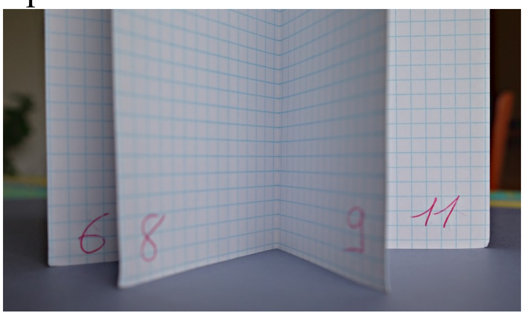
On plie des feuilles et on les place à l'intérieur de celle qui sert de couverture.





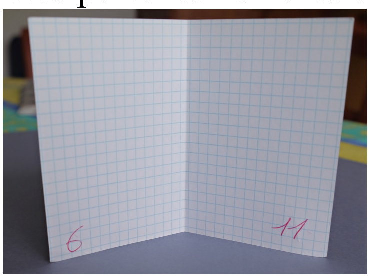
Les pages sont numérotées, en commençant par la couverture.

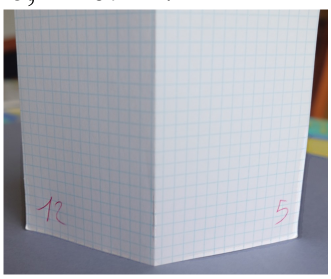




Dans les vraies revues, le plus souvent, les numéros des deux premières pages ne sont pas imprimés, le premier numéro de page visible est le 3.

Si l'on dégrafe une revue et qu'on observe une feuille, les numéros des quatre pages imprimés sur cette feuille ne se suivent pas.
La feuille de ces photos porte les numéros 5, 6, 11 et 12.





Quelques questions auxquelles on répond en observant une revue.

Cette phase permet, si c'est nécessaire, de compléter la familiarisation effectuée en fabriquant le cahier numéroté, il ne s'agit pas encore des problèmes.

- Quels sont les numéros des pages qui sont sur la même feuille que la page 17 ?
- Combien y a-t-il de feuilles pliées sur lesquelles les quatre numéros se suivent ?
- Sur cette feuille, les numéros se suivent deux par deux : 11 et 12, 57 et 58. Est-ce la même chose sur toutes les feuilles ?
- Cette feuille est numérotée 11, 12, 57, 58. Quels sont les numéros de la feuille située juste à l'intérieur de celle-ci ?

Exemples de problèmes dans ce contexte.

Cette fois, les élèves ne disposent pas de la revue. l'enseignant montre la revue à propos de laquelle une question est posée. Les élèves ne pourront l'observer que pour vérifier leurs réponses.

> Sur cette feuille de ma revue, il y a la page 25 et la page 44.
> Quels sont les autres numéros de page sur la même feuille ?
>
> Sur cette feuille de ma revue, il y a les pages 25, 26, 43 et 44.
> Quelles pages sont sur la même feuille que la page 29 ?
>
> Sur cette feuille de ma revue, il y a les pages 25, 26, 43 et 44.
> Quels sont les numéros des deux pages centrales ?
>
> Sur cette feuille de ma revue, il y a les pages 25, 26, 43 et 44.
> Combien cette revue a-t-elle de pages ?
>
> Ma revue a 68 pages.
> Quelles pages sont sur la même feuille que la page 40 ?
>
> Ma revue est faite de 15 feuilles pliées.
> Quels sont les numéros des deux pages centrales ?
>
> La dernière page de ma revue est la page 72.
> Combien de feuilles y a-t-il dans cette revue ?
>
> Sur cette feuille de ma revue, il y a les pages 25, 26, 43 et 44.
> Combien de feuilles y a-t-il dans cette revue ?