

Les sommets des polyèdres ne sont pas tous identiques

Une introduction destinée seulement aux adultes

Si l'on utilise le vocabulaire mathématique dans son sens strict, la déclaration qui nous sert de titre est absurde : les sommets étant des points, ils sont tous identiques. Si en revanche on accepte d'élargir un tout petit peu le champ d'études et d'observer un sommet et un petit morceau des arêtes qui en partent, on peut découvrir des propriétés inattendues.



Ce solide est fabriqué avec des faces de deux formes différentes : trois carrés et deux triangles équilatéraux. Pourtant, ses sommets sont tous identiques. À chaque sommet se rencontrent trois arêtes. Chaque sommet étant le point de rencontre de deux carrés et un triangle, ces arêtes forment deux angles droits et un angle de 60° .



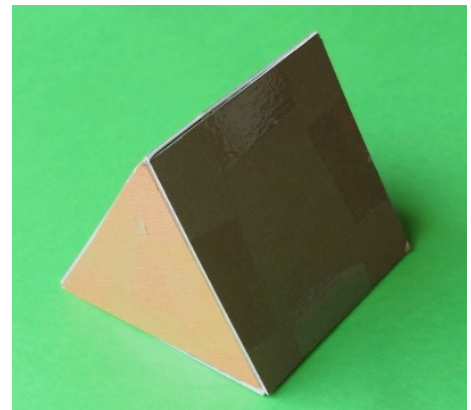
Ce solide est fabriqué avec des faces toutes identiques : six triangles équilatéraux. Pourtant, ses sommets ne sont pas tous identiques. Deux sommets sont le point de rencontre de trois arêtes. Aux trois autres sommets se rencontrent quatre arêtes. Comme les faces sont toutes des triangles équilatéraux, les angles formés par les arêtes sont toujours de 60° .

La situation décrite dans les pages suivantes a pour but d'obliger les élèves à s'intéresser à ces propriétés des polyèdres : combien d'arêtes se joignent en un même sommet, et quels sont les angles entre les arêtes.

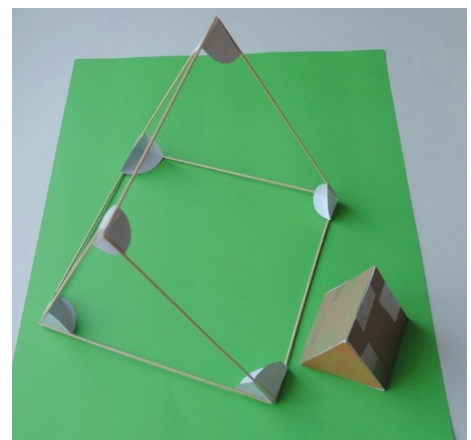
Par ailleurs, la dimension « activité manuelle » de la situation nous semble très utile à une période où ces activités ont pratiquement disparu de l'école élémentaire.

Description de la tâche

J'ai fabriqué un solide.

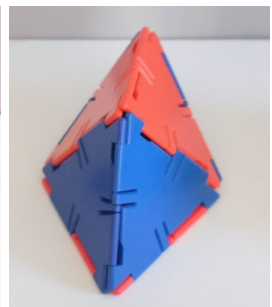
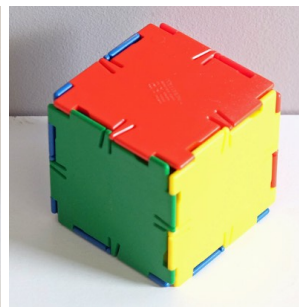
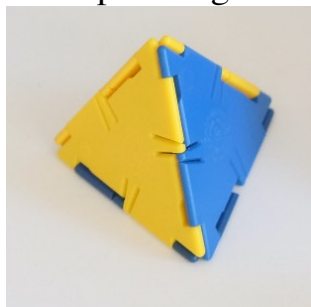
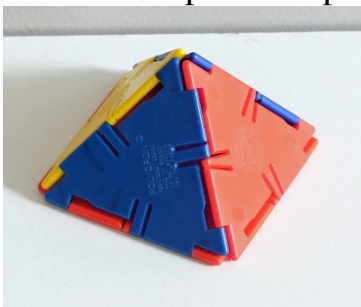


J'ai aussi fabriqué sa copie en plus grand.
Pour la copie, j'ai seulement fabriqué les arêtes.



Nous allons construire ensemble une collection de grands solides représentés seulement par leurs arêtes.

Nous ferons par exemple des copies en grand de ces solides.



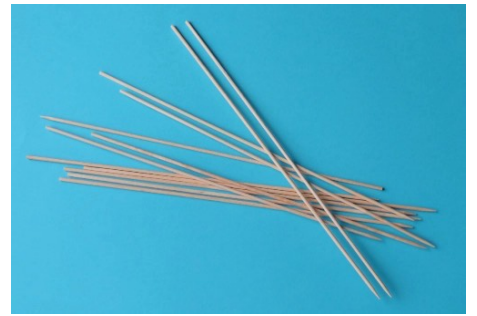
Pour commencer, chaque groupe va construire le même solide que moi.

Cela vous servira d'entraînement.

Ensuite, chaque groupe choisira un solide et en construira l'agrandissement.

Vous utiliserez des baguettes comme celles-ci pour faire les arêtes.

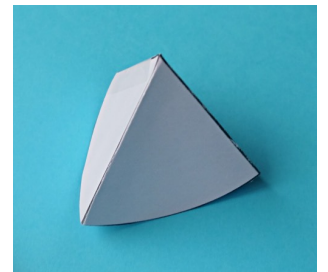
Toutes les arêtes des solides que nous allons fabriquer ont la même longueur, ça ne sera jamais utile de couper une baguette ni d'en chercher une plus longue... si une baguette ne convient pas, elle est seulement mal placée.



Pour construire le premier solide, combien vous faudra-t-il d'arêtes ?

Il en faut trois pour former ce triangle, trois pour l'autre triangle, et encore trois qui relient les deux triangles : il faut 9 arêtes pour fabriquer le solide.

Vous utiliserez aussi des renforts en carton comme celui-ci, sur lesquels vous collerez les arêtes.

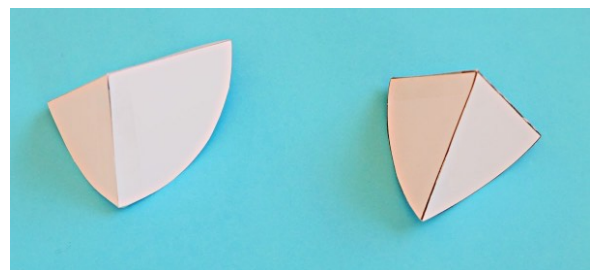


Combien en faudra-t-il ?

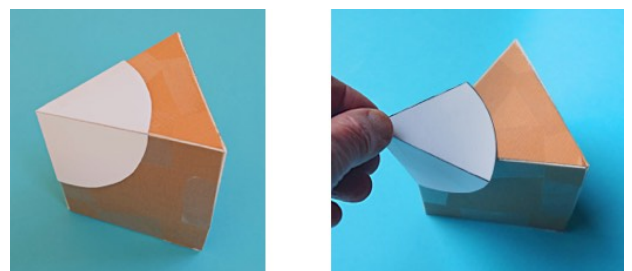
Il en faut trois pour un triangle et trois pour l'autre, six renforts en tout. Si le solide est placé comme sur la photo, on peut aussi voir quatre renforts sur la table et deux renforts en l'air... ce qui fait toujours 6 renforts.

Il faut six renforts pour les sommets du solide, mais c'est un peu plus compliqué que pour les arêtes, car les renforts ne sont pas tous identiques.

Voici par exemple deux renforts.



L'un des deux s'adapte bien sur un des coins du solide... mais pas l'autre.



Choisir les bons renforts sera une partie difficile de votre travail.

Vous disposerez d'un catalogue des renforts, que je vous distribue tout de suite.

Votre travail comportera deux parties.

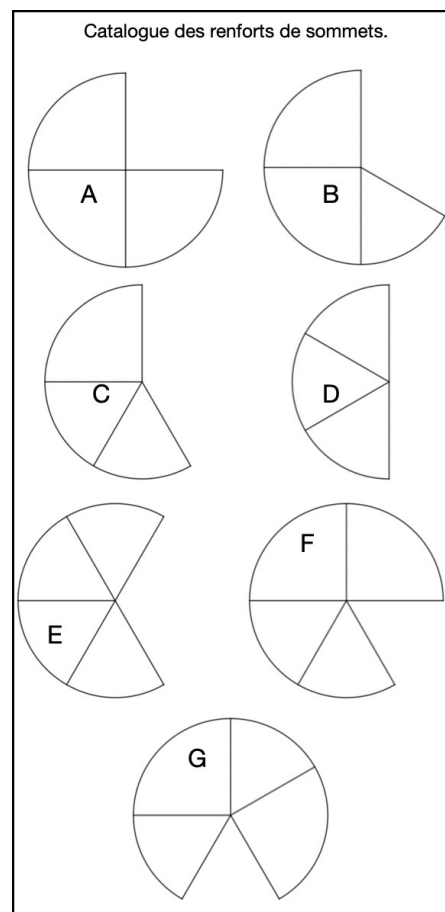
Pour commencer, rédiger un bon de commande comme celui-ci :

Il nous faut :

10 baguettes pour les arêtes

5 renforts A

5 renforts B



Ensuite, assembler les renforts puis fabriquer le solide.

La présentation de la tâche étant déjà bien longue, nous ne pensons pas utile de fournir immédiatement plus d'indications.

Pour les groupes qui choisissent assez vite un type de renfort, l'enseignant donne dans un premier temps un seul exemplaire :

— Assemblez-le, et essayez-le sur un coin du modèle, s'il convient je vous donnerai les autres.

Pour les groupes qui hésitent, l'enseignant attire l'attention sur les angles :

— À ce sommet du solide se réunissent deux carrés et un triangle équilatéral. Il faut un renfort avec deux angles de carrés (des angles droits) et un angle de triangle équilatéral (plus petit qu'un angle droit).

Quelques indications concernant la fabrication des solides

Pour la fabrication des renforts, si le découpage de la partie courbe est imprécis, ça n'a pas d'importance. En revanche, il faut être précis pour les deux bords droits. Le pliage doit également être précis, pour cela il est préférable de repasser d'abord les traits à la pointe d'un compas. L'assemblage à l'aide de ruban adhésif doit également être aussi précis que possible.

Pour l'assemblage du solide, il faut travailler à deux ou trois à chaque étape : un élève place la baguette le long de l'arête du renfort. Il veille à ce que l'extrémité de la baguette arrive juste au sommet du renfort. Un autre élève place l'adhésif. Il est pratique de découper à l'avance plusieurs morceaux d'adhésif qu'on colle provisoirement sur le bord de la table.

Ce qu'on peut apprendre à travers cette situation

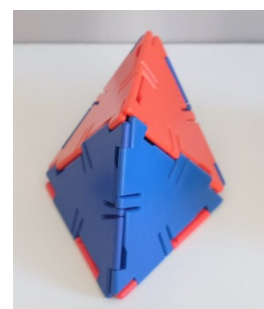
Même en n'utilisant comme faces que des carrés ou des triangles équilatéraux, il existe de nombreux polyèdres différents.

Dans un cube, à chaque sommet se rencontrent trois faces et trois arêtes... mais ce n'est pas le cas pour tous les polyèdres. D'autres solides peuvent avoir plus de trois faces et de trois arêtes qui se rejoignent en un même sommet.

Sur tous les solides que nous avons fabriqués, il y a autant de faces que d'arêtes qui se rejoignent en un même sommet. Nous nous demandons si c'est vrai pour tous les polyèdres qu'on peut inventer.

Sur certains polyèdres, tous les sommets sont identiques. Pour d'autres polyèdres, ce n'est pas vrai.

Par exemple, ce polyèdre a six faces triangulaires identiques, mais il y a des sommets où se rencontrent trois faces et d'autres où se rencontrent quatre faces.



Quelques patrons de solides pour réaliser des modèles.

Si la classe ne dispose pas de matériel Polydron ou équivalent, l'enseignant peut réaliser les solides en assemblant des carrés et triangles en carton.

Il est souvent plus facile d'assembler à l'adhésif des pièces isolées que de dessiner un patron complet.

